2016

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B}$.

Soient p l'application $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $p((x,y,z,t)) = \left(\frac{x}{2}+\frac{z}{2}, y, \frac{x}{2}+\frac{z}{2}, t\right)$,

et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^4$ ayant dans la base $\mathscr{B}$ la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dans cette question, nous étudions l'application p.
   (a) Montrer que p est une application linéaire.
   (b) Donner la matrice P de p dans la base canonique $\mathscr{B}$.
   (c) Montrer sans calcul que P est diagonalisable.
2. Dans cette question, nous étudions la matrice S et l'endomorphisme s.
   (a) Calculer S^2.
   (b) Montrer sans calcul que S est diagonalisable.
   (c) Déterminer le polynôme caractéristique de S sous une forme factorisée. Montrer que S admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 à préciser avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
   (d) Donner la multiplicité des valeurs propres λ_1 et λ_2.
   (e) Exprimer le vecteur propre u_1 de s associé à la valeur propre λ_1 dont la première composante dans la base $\mathscr{B}$ est -1.
   (f) Donner trois vecteurs propres u_2, u_3 et u_4 (linéairement indépendants) de s pour la valeur propre λ_2. On les choisira avec des composantes égales à 1 ou 0.
   (g) Donner une matrice inversible U et une matrice diagonale D telles que $S = UDU^{-1}$. On ne demande pas de calculer U^{-1}.
   (h) Calculer S^{2017}.
3. Dans cette partie, nous caractérisons les espaces $F = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Montrer que si $v \in F$ et $w \in G$ alors v et w sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.
   (c) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
4. Dans cette partie, nous cherchons à caractériser l'application linéaire p.
   (a) Calculer p^2 ($p^2 = p \circ p$).
   (b) Calculer $p(u_1)$, $p(u_2)$, $p(u_3)$ et $p(u_4)$.
   (c) Déterminer les valeurs propres et une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de de p .

(d) Donner une matrice inversible V et une matrice diagonale Δ telles que $P = V\Delta V^{-1}$. On ne demande pas de calculer V^{-1}.

(e) Caractériser géométriquement l'application linéaire p.

Exercice 2

Soit c un nombre réel non nul. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux 2π-périodiques et définies sur $[-\pi,\pi[$ par

$$\forall t \in [-\pi,\pi[, \quad f(t) = e^{ct} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} = \mathrm{ch}(ct).$$

1. Dans cette question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi,2\pi]$. On précisera sur cette figure les valeurs de f aux points de discontinuité. On donne $e^{-\pi} \simeq 0,04$, $e^{\pi} \simeq 23,14$.

2. On note

$$Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad \text{et} \quad Sg(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(nt)$$

les séries de Fourier respectives de f et g.

(a) Calculer le coefficient a_0.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a_n = \frac{2(-1)^n c\,\mathrm{sh}(c\pi)}{\pi(c^2+n^2)}.$$

Indication : on pourra utiliser $\cos(nt) = \mathrm{Re}\left(e^{int}\right)$.
On rappelle que $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n\,\mathrm{sh}(c\pi)}{\pi(c^2+n^2)}.$$

3. (a) Quelle est la parité de g ?

(b) g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(c) Montrer que la série de Fourier de g est convergente. On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.

(d) Déduire à l'aide des coefficients de Fourier a_n et b_n de f les coefficients de Fourier a'_n et b'_n de la fonction g.

4. (a) Dans cette sous-question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement g sur l'intervalle $[-2\pi,2\pi]$.

(b) Calculer $Sf(0) = Sg(0)$ et en déduire l'expression $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^2+n^2}$.

(c) Calculer $Sg(\pi)$ et en déduire l'expression $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^2+n^2}$.

5. En appliquant la relation de Parseval à g, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2+n^2}\right)^2$.

Exercice 3

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x, y) = \left(x^2+y^2-3\right)^2 + 4y^2 - 8.$$

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z = g(x, y) = \left(x^2+y^2-3\right)^2 + 4y^2 - 8.$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Comparer $g(x, y)$ avec $g(x, -y)$, $g(-x, y)$, $g(-x, -y)$. Déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de la surface S.
2. On rappelle que $p(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$. Montrer que $p(x, y) = 4x\left(x^2+y^2-3\right)$.
3. On rappelle que $q(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$. Calculer $q(x, y)$.
4. Trouver tous les couples de réels solutions du système d'équations suivant :
$$\begin{cases} 4x\left(x^2+y^2-3\right) = 0 \\ 4y\left(x^2+y^2-1\right) = 0 \end{cases}$$
5. En déduire que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.
6. Énoncer un théorème permettant de démontrer que $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses de ce théorème.
7. (a) On rappelle que $r(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y)$. Montrer que $r(x, y) = 4\left(3x^2+y^2-3\right)$.

   (b) On rappelle que $s(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)$. Calculer $s(x, y)$.

   (c) On rappelle que $t(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$. Calculer $t(x, y)$.
8. Calculer r et $rt - s^2$ pour (x, y) valant $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) trouvés à la question 5.

Partie B

On se propose de déterminer deux réels positifs α et r tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = (x^2+y^2-3)^2+4y^2-8 = \left((x-\alpha)^2+y^2-r^2\right)\left((x+\alpha)^2+y^2-r^2\right) \qquad (*).$$

1. Écrire l'égalité $(*)$ avec $(x, y) = (0,1)$. En déduire la valeur de α^2+1-r^2, s'il existe α et r tels que l'égalité $(*)$ soit vraie.

2. Écrire l'égalité $(*)$ avec $(x, y) = (1,0)$. En déduire en utilisant aussi le résultat de la question 1. de cette partie la valeur des réels positifs α et r, s'il existe α et r tels que l'égalité $(*)$ soit vraie.

3. Pour les valeurs de α et r trouvées dans les cas particuliers $(0,1)$ et $(1,0)$, montrer que l'égalité $(*)$ est vraie pour tout couple de réels (x, y).

4. En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation $g(x, y) = 0$ est formé de deux cercles dont on donnera les centres, les rayons et les coordonnées des points d'intersection.

Exercice 4

On se donne un tableau à une dimension, de longueur n dont les entrées sont indexées de 1 à n, ne contenant que des 0 et des 1, commençant et se terminant par un 0. On supposera qu'il ne contient pas que des 0.

Dans un tel tableau on appelle **séquence1** une suite de 1 consécutifs précédés et suivis d'au moins un 0. Ci-dessous, on a un exemple d'un tel tableau de longueur 16, comportant 4 **séquence1**, dont une de longueur 4 entre les numéros 8 et 11, et une en 15 de longueur 1. On se propose d'écrire des fonctions en métalangage ou en Scilab permettant de calculer le nombre, la longueur et la position de telles **séquence1**.

Index i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tableau1(i)	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

1. Soit la fonction `f` écrite en Scilab, avec en entrée un tableau `t` défini précédemment.

```
function nb=f(t)
    nb=0
    n=length(t)
    for i=1:(n-1)
        if t(i)<t(i+1)
            nb=nb+1
        end
    end
endfunction
```

   Expliquer ce que renvoie `f(Tableau1)` et préciser le fonctionnement de `f`.

2. Écrire en métalangage ou en Scilab une fonction `g` qui détermine et renvoie la position et la longueur [début,fin,longueur] de la plus longue `séquence1` du tableau (en cas d'égalité de longueur celle de la première rencontrée). Par exemple `g(Tableau1)` doit renvoyer la liste [3,6,4].
