Mathématiques - ATS - 2019

Durée : 3 heures. - Coefficient : 3

La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1.

ATS–2019–Ex. 1

Correction par : I. Souderes

1. (a) La matrice d'une application linéaire dans une base est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs coordonnées (dans la base) des images des vecteurs de la base. Ici, on a d'après l'énoncé :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable (théorème spectrale).

(c) Une multiplication matricielle donne

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 = I.$$

où $I = I_4$ est la matrice identité de $M_4(\mathbb{R})$. On en déduit que $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}$ et que s est une symétrie.

(d) On calcule le polynôme $\chi_S(X)$ caractéristique de S en développant sur la première colonne

$$\chi_S(X) = \det(XI - S) = (-1)^4 \det(M - XI) = \det(M - XI)$$

$$= \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -X & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-X^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X^2 \\ 1 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-X^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X^2 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X^2 & 0 \\ 0 & 1-X^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X^2)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$$

Ainsi le polynôme caractéristique de S vaut :

$$\chi_S(X) = (X-1)^2(X+1)^2.$$

(e) Les valeur propres de S sont les racines du polynôme caractéristique

$$\chi_S(X) = (X-1)^2(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de S sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ qui sont toutes deux de multiplicités 2 car les deux racines de $\chi_S(X)$ sont de multiplicité 2.

(f) L'espace propre E_1 est l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$s(u) = \lambda_1 u = -u;$$

ce sous-espace vectoriel est au plus de dimension 2 car la multiplicité de λ_1 est 2.
On remarque que pour $u_1 = e_1 - e_3$ on a

$$s(u_1) = s(e_1 - e_3) = s(e_1) - s(e_3) = e_3 - e_1 = -u_1$$

et que pour $u_2 = e_2 - e_4$ on a aussi

$$s(u_2) = s(e_2) - s(e_4) = e_4 - e_2 = -u_2.$$

Ainsi les vecteurs u_1 et u_2 ci-dessus qui sont non nuls sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre λ_1. Par ailleurs ces deux vecteurs sont non-colinéaires et forment donc une famille libre (u_1, u_2) de E_1.
Comme $\dim(E_1) \leqslant 2$, la famille (u_1, u_2) est une base de E_1. Les coordonnés de u_1 et u_2 dans la base $\mathscr{B}$ sont donnée par

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs u_1 et u_2 correspondent donc bien aux exigences de l'énoncé.
Autre méthode : On pourrait résoudre le système $SX = -X$ ce qui conduit à des calculs similaires et une réponse possible identique.

(g) L'espace propre E_2 est l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$s(u) = \lambda_2 u = u;$$

ce sous-espace vectoriel est au plus de dimension 2 car la multiplicité de λ_2 est 2.
On remarque, comme précédemment, que pour $u_3 = e_1 + e_3$ et pour $u_4 = e_2 + e_4$ on a

$$s(u_3) = s(e_1) + s(e_3) = e_3 + e_1 = u_3$$

et

$$s(u_4) = s(e_2) + s(e_4) = e_4 + e_2 = u_2.$$

Ainsi les vecteurs u_3 et u_4 ci-dessus qui sont non nuls sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre λ_2. Par ailleurs ces deux vecteurs sont non-colinéaires et forment donc une famille libre (u_3, u_4) de E_1.
Comme $\dim(E_2) \leqslant 2$, la famille (u_3, u_4) est une base de E_2. Les coordonnés de u_3 et u_4 dans la base $\mathscr{B}$ sont donnée par

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_4) = U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs u_3 et u_4 correspondent donc bien aux exigences de l'énoncé.
Autre méthode : On pourrait résoudre le système $SX = X$ ce qui conduit à des calculs similaires et une réponse possible identique.

(h) Les sous-espaces propre E_1 et E_2 étant associés à des valeurs propres distinctes, ils sont en somme directe et la famille de vecteur (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ car (u_1, u_2) est libre dans E_1 et (u_3, u_4) est libre dans E_2. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) étant libre à 4 éléments dans $\mathbb{R}^4$ de dimension 4, c'est une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

Les deux questions précédentes assurent que

$$s(u_1) = -u_1, \quad s(u_2) = -u_2, \quad s(u_3) = u_3, \quad s(u_4) = u_4$$

et donc que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(s) = D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $Q = Q_1$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$,

$$Q = Q_1 = \mathrm{P}_{\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a par la formule du changement de base

$$S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \mathrm{P}_{\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(s) \, \mathrm{P}^{-1}_{\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}'} = Q_1 D_1 Q_1^{-1};$$

c'est-à-dire

$$S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}.$$

2. (a) En suivant la définition donnée en 1a, on calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ par p :

$$p(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 - s(e_1)) = \frac{1}{2}(e_1 - e_3)$$
$$p(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 - s(e_2)) = \frac{1}{2}(e_2 - e_4)$$
$$p(e_3) = \frac{1}{2}(e_3 - s(e_3)) = \frac{1}{2}(e_3 - e_1)$$
$$p(e_4) = \frac{1}{2}(e_4 - s(e_4)) = \frac{1}{2}(e_4 - e_2).$$

On en déduit donc

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a montré à la question 1c que $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}$. On calcule alors

$$p \circ p = \frac{1}{4}(\mathrm{id} - s) \circ (\mathrm{id} - s) = \frac{1}{4}(\mathrm{id} - s - s + s \circ s) = \frac{1}{4}(2\,\mathrm{id} - 2s) = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - s) = p.$$

Ainsi $p \circ p = p$ et p est un projecteur.

(c) On rappelle que d'après les questions 1e, 1f et 1g les vecteurs u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ et que les vecteurs u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre $\lambda_2 = 1$. On a donc

$$p(u_1) = \frac{1}{2}(u_1 - s(u_1)) = \frac{1}{2}(u_1 + u_1) = u_1$$
$$p(u_2) = \frac{1}{2}(u_2 - s(u_2)) = \frac{1}{2}(u_2 + u_2) = u_2$$
$$p(u_3) = \frac{1}{2}(u_3 - s(u_3)) = \frac{1}{2}(e_3 - u_3) = 0$$
$$p(u_4) = \frac{1}{2}(u_4 - s(u_4)) = \frac{1}{2}(u_4 - u_4) = 0.$$

(d) La famille de vecteurs $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (voir question 1h). La question précédente assure que les vecteurs u_i pour $i \in \{1,2,3,4\}$ (qui sont non nuls) sont des vecteurs propres de p : u_1 et u_2 sont associés à la valeur propre 1 et u_3 et u_4 sont associés à la valeur propre 0.

L'endomorphisme p admet donc une base de vecteurs propres et est donc diagonalisable.

En particulier, dans la base $\mathscr{B}'$, on a

$$D_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) On notant comme à la question 1h,

$$Q_2 = Q_1 = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, on trouve par changement de base

$$P = Q_2 D_2 Q_2^{-1};$$

D_2 étant la matrice définie à la question précédente

$$D_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Pour déterminer la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$, il suffit de travailler matricellement avec les matrices S et P de s et p dans la base $\mathscr{B}$. On obtient ainsi

$$F = 3S + 4P = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) On sait d'après 1h que

$$S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$$

avec

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a montré à la question 2e que

$$P = Q_1 D_2 Q_1^{-1}$$

avec

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{et } Q_1 = Q_2).$$

De là, on calcule :

$$F = 3S + 4P = 3Q_1 D_1 Q_1^{-1} + 4Q_1 D_2 Q_1^{-1} = Q_1 (3D_1 + 4D_2) Q_1^{-1} = Q_1 D_3 Q_1^{-1}$$

avec D_3 la matrice digonale

$$D_3 = 3D_1 + 4D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et aussi } Q_3 = Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

ATS–2019–Ex. 2

Correction par : I. Souderes

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\operatorname{ch}(-t) = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch}(t)$$

et

$$\operatorname{sh}(-t) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2} = -\frac{e^{t} - e^{-t}}{2} = -\operatorname{sh}(t).$$

Ainsi la fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.

(b) Les fonctions $t \longrightarrow e^t$ et $t \longrightarrow e^{-t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par somme de fonctions dérivables, les fonctions ch et sh le sont. On a donc pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}'(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh}(t) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}'(t) = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch}(t).$$

(c) La fonction f est une somme de puissances de fonctions dérivables (d'après la question précédente) et f est donc dérivable. On déduit de la question précédente que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t) - 2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t) = 0.$$

La fonction f est donc constante égale à $f(0) = 1$ car

$$\operatorname{ch}(0) = \frac{e^{0} + e^{0}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(0) = \frac{e^{0} - e^{0}}{2} = 0.$$

On déduit de la discussion précédente que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}(t)^2 - \operatorname{sh}(t)^2 = 1.$$

2. On a déjà remarqué que

$$\operatorname{ch}(0) = \frac{e^{0} + e^{0}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(0) = \frac{e^{0} - e^{0}}{2} = 0.$$

Par ailleurs, $\lim_{t \longrightarrow -\infty} e^t = 0$ et $\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^t = +\infty$. Par compoistion et somme de limites on en déduit que

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} \operatorname{ch}(t) = \lim_{t \longrightarrow -\infty} \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \operatorname{ch}(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} = +\infty$$

et que

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} \operatorname{sh}(t) = \lim_{t \longrightarrow -\infty} \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \operatorname{sh}(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} = +\infty$$

La fonction exponentielle étant toujours strictement positive, on en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\,'(t) = \mathrm{ch}\,(t) > 0$ et donc que la fonction sh est toujours strictement croissante. De là, on obtient

t	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}\,'$		$+$	1	$+$	
Variation de sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $\mathrm{sh}\,(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$ et que $\mathrm{sh}\,(t) > 0$ si et seulement si $t > 0$. Comme $\mathrm{ch}\,' = \mathrm{sh}$, on en déduit :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\mathrm{ch}\,'$		$-$	0	$+$	
Variation de ch	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) On sait que $\mathrm{sh}\,(0) = 0$ et que

$$\mathrm{sh}\,(\ln(10)) = \frac{e^{\ln 10} - e^{-\ln 10}}{2} = \frac{10 - \frac{1}{10}}{2} = \frac{99}{20} \geqslant \frac{80}{20} = 4.$$

Or la fonction sh est continue sur $[0, \ln(10)]$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$), elle est strictement monotone sur $[0, +\infty[$ et donc sur $[0, \ln(10)]$ et $1 \in [0, 4] \subset [0, \mathrm{sh}\,(\ln 10)]$. Donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique $\alpha \in [0, \ln(10)]$ tel que $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$.

(b) On sait que $z = e^{\alpha} > 0$ et que $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$. On a donc

$$1 = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 - 1}{2z}.$$

C'est-à-dire en multipliant par $2z$:

$$2z = z^2 - 1$$

ce qui est équivalent à

$$z^2 - 2z - 1 = 0.$$

(c) Le polynôme $X^2 - 2X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ et pour racines

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et } x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Comme $\sqrt{2} \geqslant 1$, on en déduit que $1-\sqrt{2} \leqslant 0$ et que

$$z = 1+\sqrt{2}$$

car on sait que $z = e^{\alpha} \geqslant 0$. On conclut enfin que

$$\alpha = \ln(z) = \ln(1+\sqrt{2}).$$

(d) On a déjà montré en A-3a que $\alpha \geqslant 0$. Il suffit donc de montrer que $\alpha \leqslant 1$.
Comme la fonction exponetielle est croissante, il suffit de montrer que $z = e^{\alpha} \leqslant e^1 = e \approx 2,72$.
Or $\sqrt{2} \leqslant 1,5$ donc $z = 1+\sqrt{2} \leqslant 2,5 < e$. On a donc bien

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

4. On sait que $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$. Donc on a

$$(\mathrm{ch}\ \alpha)^2 = 1 + (\mathrm{sh}\ \alpha)^2 = 1+1 = 2$$

d'après la question A-1c. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\ t \geqslant 1 > 0$, on en déduit

$$\mathrm{ch}\ \alpha = \sqrt{2}.$$

Autre approche :

On note, comme précédemment, $z = e^{\alpha}$. On calcule alors :

$$\mathrm{ch}\,(\alpha) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{2z+2}{2z} = \frac{z+1}{z}$$

car $z^2 = 2z+1$. On en déduit alors

$$\mathrm{ch}\ \alpha = \frac{z+1}{z} = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{2-1} = \sqrt{2}.$$

Partie B – Suite d'intégrales

Les fonctions $t \longmapsto (\mathrm{sh}\ t)^{2n}$ sont continues sur $[0,\alpha]$ pour tout entier positif n car ce sont des puissances de la fonction dérivable et donc continue sh (Partie A).

1. Un calcul direct donne :

$$I_0 = \int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\ t)^0\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} 1\,\mathrm{d}t = \alpha.$$

2. On sait d'après la partie A que la fonction sh est (strictement) croissante et que $\mathrm{sh}\,(0) = 0$ ainsi que $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$. On en déduit donc

$$\forall t \in [0,\alpha], \qquad 0 \leqslant \mathrm{sh}\ t \leqslant 1.$$

On a donc pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\forall t \in [0,\alpha], \qquad 0 \leqslant (\mathrm{sh}\ t)^k \leqslant (\mathrm{sh}\ t)^{k-1};$$

et donc

$$\forall t \in [0,\alpha], \qquad 0 \leqslant (\mathrm{sh}\ t)^{2n} \leqslant (\mathrm{sh}\ t)^{2n-1} \leqslant (\mathrm{sh}\ t)^{2(n-1)}.$$

Ainsi en intégrant sur $[0,\alpha]$, on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant I_n = \int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\ t)^{2n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\ t)^{2(n-1)}\,\mathrm{d}t = I_{n-1}.$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; on en déduit qu'elle est convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En sachant que $\text{sh}\,(0) = 0$ et $\text{sh}\,(\alpha) = 1$, une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_0^\alpha (\text{sh } t)^{2n+2}\,\text{d}t &= \int_0^\alpha (\text{sh } t)^{2n+1}\,\text{sh } t\,\text{d}t \\ &= \big[(\text{sh } t)^{2n+1}\,\text{ch } t\big]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n+1)(\text{ch } t)^2 (\text{sh } t)^{2n}\,\text{d}t \\ &= \text{ch } \alpha - (2n+1)\int_0^\alpha (1+(\text{sh } t)^2)(\text{sh } t)^{2n}\,\text{d}t \\ & \text{ch } \alpha - (2n+1)(I_n + I_{n+1}). \end{aligned}$$

On a bien montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = \text{ch } \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question précédente que

$$I_{n+1} = \text{ch } \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n) = I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$$

car on a montré en A-4 que $\text{ch } \alpha = \sqrt{2}$. On en déduit, en faisant passer du même coté de l'égalité les termes en I_{n+1}, que

$$(2n+2)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)I_n.$$

Ce qui permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

(c) On sait d'après la question B-2 que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on note l. D'après la question précédente, pour tout entier positif n

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

Il s'agit pour déterminer l de passer à la limite dans cette relation. On sait que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_{n+1} = l$ et que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n+2} = 0 \quad \text{et} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

En passant à la limite dans la relation de récurrence ci-dessus, on obtient donc

$$l = -l$$

et donc

$$l = 0.$$

Ainsi on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n = l = 0$.

Partie C – Algorithmique

1.

```
function [a, b]=dicho(eps)
  a = 0
  b= 1
  while b-a > eps
    c=(a+b)/2
    if sinh(a)<1 then a=c
                 else b=c
    end
  end
endfunction
```

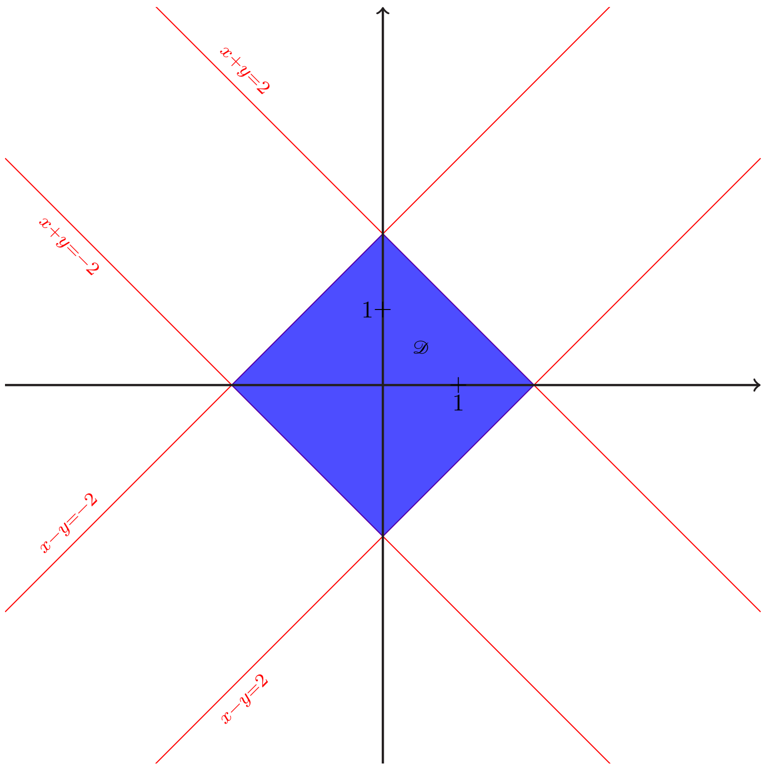
2.

```
function I=Intapp(n)
  if n=0 then I=0.881
         else I = 0.881
              for i=0 :n-1
                I= sqrt(2)/(2*i+2)-(2*i+1)/(2*i+2)*I
              end
  end
endfunction
```

Exercice 3.

ATS–2019–Ex. 3

Correction par : I. Souderes



1. (a)

(b) Soit $(x, y) \in \mathscr{D}$. On a donc

$$|x + y| \leqslant 2 \text{ et } |x - y| \leqslant 2.$$

Montrons que le point $(x, -y)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$. On majore

$$|x + (-y)| = |x - y| \leqslant 2$$

car $(x, y) \in \mathscr{D}$; et aussi

$$|x - (-y)| = |x + y| \leqslant 2$$

pour la même raison. Donc $(x, -y) \in \mathscr{D}$. L'ensemble $\mathscr{D}$ admet donc la droite $y = 0$ pour axe de symétrie ; c'est-à-dire l'axe des abscisses.

(c) Soit (x, y) un point de $\mathscr{D}$. On a comme précédemment

$$|x + y| \leqslant 2 \text{ et } |x - y| \leqslant 2.$$

Montrons que le point $(-x,-y)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$. On majore

$$|-x+(-y)| = |-x-y| = |x+y| \leqslant 2$$

car $(x,y) \in \mathscr{D}$; et aussi

$$|-x-(-y)| = |-x+y| = |x-y| \leqslant 2$$

pour la même raison. Donc $(-x,-y) \in \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ est stable par la symétrie centrale de centre $O=(0,0)$.

(d) Les inégalité définissant $\mathscr{D}$ étant large, l'ensemble $\mathscr{D}$ est fermé dans R^2.

Aucune boule de rayon ϵ centrée sur le point $(2,0)$ ne peut être contenue dans $\mathscr{D}$ car $(2+\frac{\epsilon}{2},0) \notin \mathscr{D}$. L'ensemble $\mathscr{D}$ n'est donc pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est continue sur $\mathscr{D}$ car la fonction $(x,y) \longmapsto x$ l'est et que la fonction $(x,y) \longmapsto \ln(x^2+y^2+1)$ l'est aussi car composée d'une fonction polynomiale $(x,y) \longmapsto x^2+y^2+1 \geqslant 1 > 0$ et de la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ qui est continue sur $[1,+\infty[$.

par ailleurs l'ensemble $\mathscr{D}$ est fermé d'après la question précédente.

Enfin, pour $(x,y) \in \mathscr{D}$, on a

$$|x+y| \leqslant 2 \text{ et } |x-y| \leqslant 2$$

et donc

$$0 \leqslant |x+y|^2 = x^2+y^2+2xy \leqslant 4 \text{ et } 0 \leqslant |x-y|^2 = x^2+y^2-2xy \leqslant 4.$$

On en déduit que

$$x^2+y^2 \leqslant 4 \text{ puis } \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2$$

et donc que $\mathscr{D}$ est inclu dans $B((0,0),2)$ la boule de centre $O=(0,0)$ et de rayon 2. L'ensemble $\mathscr{D}$ est ainsi bornée.

La fonction f est donc continue sur $\mathscr{D}$ qui est fermé et borné. Le théorème de Weierstraß assure alors que f est bornée et atteint ses bornes.

3. (a) Soit $(x,y) \in \mathscr{O}$. On calcule

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{grad}\ f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\
&= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1} - 1, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \left(\frac{-x^2+2x-1-y^2}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)
\end{aligned}$$

(b) Soit (x,y) un point critique de f dans $\mathscr{O}$. On a alors $\overrightarrow{grad}\ f(x,y) = (0,0)$; c'est-à-dire

$$\left(\frac{-x^2+2x-1-y^2}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = (0,0).$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} \frac{-x^2+2x-1-y^2}{x^2+y^2+1}, = 0 \\ \frac{2y}{x^2+y^2+1} = 0. \end{cases}$$

Comme nécéssairement $x^2+y^2+1 \geqslant 1 > 0$, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} -x^2+2x-1-y^2=0 \\ 2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ -(x-1)^2-y^2=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=0 \\ (x-1)^2=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

Ainsi (x,y) est un point critique de la fonction f dans $\mathcal{O}$ si et seulement si $(x,y)=(1,0)$

(c) On utilisera pour ce faire le
Théorème de Schwarz : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Dans notre cas il s'agit de montrer que $f : (x,y) \longmapsto \ln(x^2+y^2+1)-x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$. Il suffit pour cela de montrer que ces dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.
Comme pour tout $(x,y) \in \mathcal{O}$, x^2+y^2+1 est toujours non nul (cette expression est en fait toujours supérieure à 1), la fonction

$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2+1},$$

qui est une expression rationnelle sans pole sur $\mathbb{R}^2$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $\mathcal{O}$.
On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et par symétrie de l'expression que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ l'est aussi.
Ainsi la fonction f considérée est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$ et d'après le théorème de Schwarz on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

(d) Soit $(x,y) \in \mathcal{O}$. Un calcul direct donne

$$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1} - 1\right) = \frac{2x^2+2y^2+2-4x^2}{(x^2+y^2+1)^2}$$
$$= \frac{2y^2-2x^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

De même on a

$$s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2},$$

et

$$\begin{aligned} t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{2x^2+2y^2+2-4y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(e) À l'aide de la question précédente on calcule simplement

$$\begin{aligned} r(1,0) &= \frac{0-2+2}{(1^2+0^0+1)^2} = 0 \\ s(1,0) &= \frac{0}{(1^2+0^0+1)^2} = 0 \\ t(1,0) &= \frac{2-0+2}{(1^2+0^0+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

De là, en évaluant la fonction $rt - s^2$ au point $(1,0)$ on trouve

$$r(1,0)t(1,0) - s(1,0)^2 = 0 - 0 = 0.$$

Ce résultat ne permet pas de conclure quant à la nature du point critique $(1,0)$.

(f) Au voisinage de 0, on a

$$\mathrm{DL}_3 : \qquad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{0}{\mathrm{o}}(u^3)$$

(g) Notons g la fonction d'une variable réelle définie par

$$g(t) = f(1+t,0) - f(1,0) = \ln((1+t)^2+1) - (1+t) - (\ln(2)-1)$$

qui est en fait définie pour tout réel t car $(1+t)^2+1$ et toujours positif. La fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ par composition de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Elle admet ainsi un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

On calcule pour t au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln((t^2+2t+2) - 1 - t - \ln(2) + 1 \\ &= \ln\left(2\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\right) - t - \ln(2) \\ &= \ln\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) - t \\ &= t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^3 + \underset{0}{\mathrm{o}}(t^3) - t \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{3} + \underset{0}{\mathrm{o}}(t^3) \\ &= \frac{-1}{6}t^3 + \underset{0}{\mathrm{o}}(t^3) \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 0 la fonction g change de signe avec t (en étant de signe opposé à t). Ainsi il en est de même de l'expression $f(1+t,0) - f(1,0)$ et on en déduit que le point critique $(1,0)$ n'est pas un extremum local de f car on peut avoir

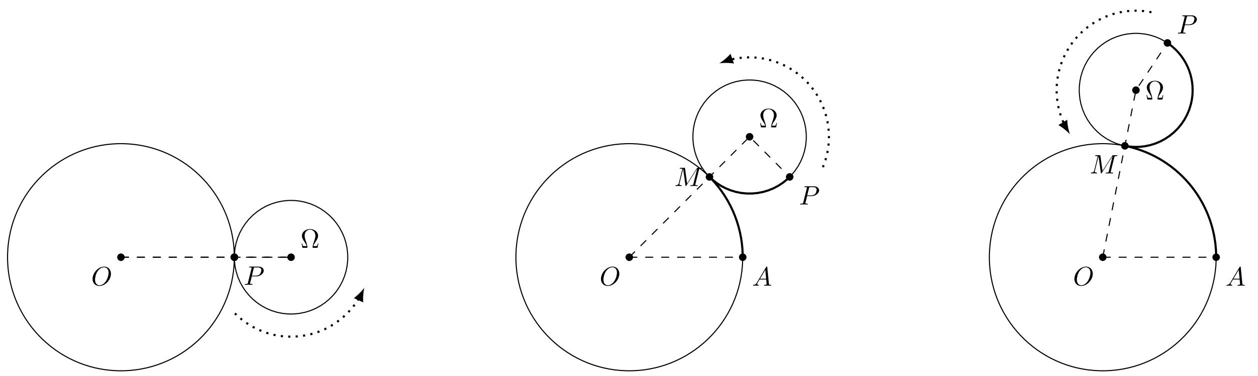
$$f(1+t,0) \geqslant f(1,0) \text{ ou } f(1+t,0) \leqslant f(1,0)$$

suivant $t < 0$ ou $t > 0$.

Exercice 4.

ATS–2019–Ex. 4

Correction par : I. Souderes



Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A - Étude de la trajectoire du point P

1. On admet que le point A est la position du point $M = P$ pour un mouvement angulaire de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$.

   On note $\theta_1 = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $\theta_2 = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right)$.

   D'après l'énoncé (et car le cercle de centre Ω roule sans glisser) la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{MP}$.

   Les deux angles θ_1 et θ_2 sont positifs. La longeur de l'arc $\widehat{AM}$ vaut : $\widehat{AM} = 1 \cdot \theta_1$. La longueur de l'arc $\widehat{MP}$ vaut elle :$\frac{1}{2} \cdot \theta_2$. On en déduit donc :
$$\theta_1 = \frac{1}{2}\theta_2$$
   c'est-à-dire
$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right) = \theta_2 = 2\theta_1 = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$$

2. En suivant le dessin, comme à la question précédente, on admet que le point A est la position du point $M = P$ pour un mouvement angulaire de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = t = 0$.

   Notons $\mathscr{D}$ la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point m. La droite (OM) (porté par $\vec{u} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$) est donc orthogonale à la droite $\mathscr{D}$ (portée par le vecteur tangent au cercle $\vec{v} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$). La droite $\mathscr{D}$ est aussi tangente au cercle $\mathscr{E}$ et la droite (ΩM) est de la même manière orthogonale à la droite $\mathscr{D}$. les deux droites (OM) et (ΩM) sont donc orthogonales à une même droite $(\mathscr{D})$ et donc parallèles. Comme elles ont un point en commun, elles sont confondues et les point O, M et Ω sont alignés.

   La distance $O\Omega$ vaut donc
$$O\Omega = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
   et l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Omega})$ vaut
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Omega}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = t.$$
   Ainsi les coordonnées de Ω dans le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$; c'est-à-dire
$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$$
   car $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$

3. Pour montrer que le repère $\mathscr{P}=(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est orthonormal, il faut démontrer que

$$\left\langle\vec{u};\vec{u}\right\rangle = 1, \quad \left\langle\vec{v};\vec{v}\right\rangle = 1, \quad \left\langle\vec{u};\vec{v}\right\rangle = 0;$$

où $\langle\ ;\ \rangle$ désigne le produit scalaire faisant de $\mathscr{R}$ un repère orthonormal (implicitement d'après l'énoncé le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$).

On se ramène donc au coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathscr{R}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

On en déduit alors par un calcul en coordonnées que

$$\begin{aligned}\left\langle\vec{u};\vec{u}\right\rangle &= \cos(t)^2+\sin(t)^2 = 1\\ \left\langle\vec{v};\vec{v}\right\rangle &= \sin(t)^2+\cos(t)^2 = 1\\ \left\langle\vec{u};\vec{u}\right\rangle &= -\cos(t)\sin(t)+\sin(t)\cos(t) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi le repère $\mathscr{P}$ est bien orthonormé.

4. On veut montrer que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}$ sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin 2t}{2}\right).$$

On sait déjà que $\Omega P = \frac{1}{2}$. Calculons l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right)$.

Notons tout d'abord que l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega P}\right) = \pi$ car les points O, M et Ω sont alignés (d'après la question 2).

Ensuite. d'après la question 1 et l'énoncé l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right) = 2t$. Donc l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega P}\right)$ mesure

$$\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right) = \pi + 2t.$$

On sait par ailleurs que

$$\cos(\pi+2t) = -\cos(2t) \quad \text{et} \quad \sin(\pi+2t) = -\sin(2t).$$

On en déduit donc que les coordonées de P dans le repère $\mathscr{P}$ sont

$$\left(\frac{1}{2}\cos(\pi+2t), \frac{1}{2}\sin\pi+2t\right) = \left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin 2t}{2}\right).$$

5. Comme les coordonnées de N dans le repère $\mathscr{P}=(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ sont (X,Y), ces coordonnées (x',y') dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ valent

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}.$$

car le vecteur $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) est obtenu à partir du vecteur $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$) par la rotation d'angle t qui s'exprime matriciellement par :

$$\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

De là, on obtient les coordonnées de N dans le repère $\mathscr{R}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OM}$ (d'après la question 2). On a ainsi

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}.$$

6. D'après la question 4, les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}= (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ sont
$$(X, Y) = \left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin 2t}{2}\right).$$
D'après la question précédente les coordonnées (x, y) du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont données par
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$
On calcule donc :
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(- \cos t\cos(2t) + \sin t\sin(2t)\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(- \sin t\cos(2t) - \cos t\sin(2t)\Big) \end{cases}$$
Ce qui donne en développant les $\cos(2t)$ et les $\sin(2t)$:
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(- \cos t(2(\cos t)^2 - 1) + 2(\sin t)^2\cos t\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(- \sin t(1 - 2(\sin t)^2) - 2(\cos t)^2\sin t\Big) \end{cases}$$
puis
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(- \cos t(2(\cos t)^2 - 1) + 2(1 - (\cos t)^2)\cos t\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(- \sin t(1 - 2(\sin t)^2) - 2(1 - (\sin t)^2)\sin t\Big) \end{cases}$$
et en simplifiant
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(- \cos t(4(\cos t)^2 - 3)\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(\sin t(-3 + 4(\sin t)^2)\Big) \end{cases}$$
Enfin on obtient que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont données par
$$\begin{cases} x = 3\cos t + 2(\cos t)^3 \\ y = 2(\sin t)^3 \end{cases}$$
ce qui est bien l'expression demandée.

Partie B - Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée.

1. Comme les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$x(t + 2\pi) = 3\cos(t + 2\pi) - 2(\cos(t + 2\pi))^3 = 3\cos(t) - 2(\cos(t))^3 = x(t)$$
et
$$y(t + 2\pi) = 2(\sin(t + 2\pi))^3 = 2(\sin(t))^3 = y(t).$$
Ainsi les fonctions x et y sont 2π-périodiques.

2. On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned} P(t + \pi) &= (x(t + \pi), y(t + \pi)) \\ &= (3\cos(t + \pi) - 2(\cos(t + \pi))^3, 2(sin(t + \pi))^3) \\ &= (- 3\cos(t) + 2(\cos(t))^3, -2(sin(t))^3) \\ &= (-x(t), -y(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, le point $P(t+\pi)$ est obtenu à partir du point $P(t)$ par la symétrie centrale de centre O. Les fonctions x et y étant 2π-périodiques, on étudie la courbe $\mathscr{N}$ pour les points de paramètres $t \in [-\pi, \pi]$. On en déduit qu'il suffit d'étudier $\mathscr{N}$ pour les points de paramètres $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Du fait que la fonction cos est paire et la fonction sin impaire, on a pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
P(-t) &= (x(-t), y(-t)) \\
&= (3\cos(-t) - 2(\cos(-t))^3, 2(sin(-t))^3) \\
&= (3\cos(t) - 2(\cos(t))^3, -2(sin(t))^3) \\
&= (x(t), -y(t)).
\end{aligned}$$

Ainsi, le point $P(t+\pi)$ est obtenu à partir du point $P(t)$ par la symétrie d'axe $(O, \vec{i}$, l'axe des abscisses. D'après le travail précédent, on étudie la courbe $\mathscr{N}$ pour les points de paramètres $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On déduit de la symétrie ci-dessus qu'il suffit d'étudier $\mathscr{N}$ pour les points de paramètres $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Les fonctions x et y sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ car sommes et produits de fonctions trigonométriques. On a pour $t \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$x'(t) = -\sin t(3 - 6(\cos t)^2)$$

et

$$y'(t) = 6(\cos t)(\sin t)^2.$$

Comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \sin t \leqslant 1,$$

on en déduit le tableau de variations conjoint de x et y :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Signe de x'	0	$+$	0	$-$	-3
Variation de x	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
Variation de y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	2
Signe de y'	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$+$	0

On a ici calculé :

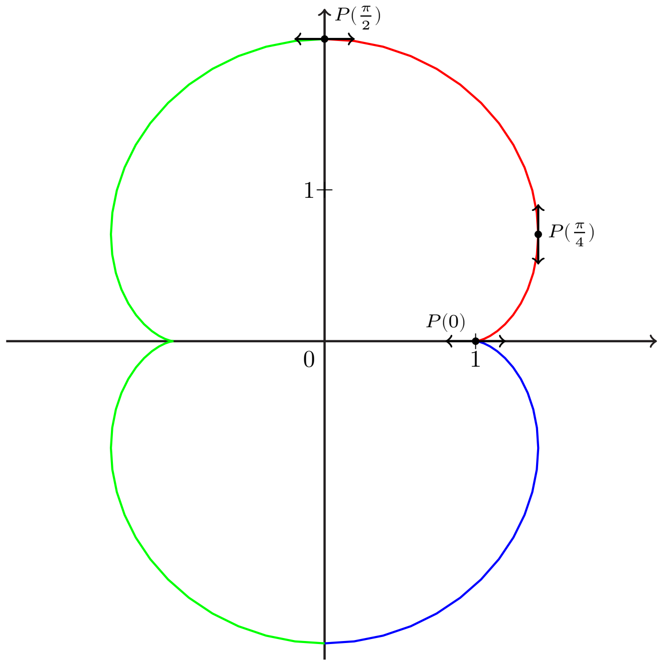
$$\begin{aligned}
x(0) &= 3\cos(0) - 2\cos(0)^3 = 3 - 2 = 1\\
x(\frac{\pi}{4}) &= 3\cos(\frac{\pi}{4}) - 2\cos(\frac{\pi}{4})^3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}\\
x(\frac{\pi}{2}) &= 3\cos(\frac{\pi}{2}) - 2\cos(\frac{\pi}{2})^3 = 0\\
x'(0) &= -\sin(0)(3 - 6(\cos(0))^2) = 0\\
x'(\frac{\pi}{4}) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(3 - 6\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - 6\frac{2}{4}) = 0\\
x'(\frac{\pi}{2}) &= -\sin(\frac{\pi}{2})\left(3 - 6\left(\cos(\frac{\pi}{2})\right)^2\right) = -3\\
y(0) &= 2\sin(0)^3 = 0\\
y(\frac{\pi}{4}) &= 2\sin(\frac{\pi}{4})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
y(\frac{\pi}{2}) &= 2\sin(\frac{\pi}{2})^3 = 2\\
y'(0) &= 6\cos(0)\sin(0)^2 = 0\\
y'(\frac{\pi}{4}) &= 6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 6\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\\
y'(\frac{\pi}{2}) &= 6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

On a aussi remarqué que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{aligned}
x'(t) \geqslant 0 &\iff -\sin(t)(3 - 6\cos(t)^2) \geqslant 0\\
&\iff 1 - 2\cos(t)^2 \leqslant 0 && \text{car } -\sin(t) \leqslant 0\\
&\iff \sin(t)^2 - \cos(t)^2 \leqslant 0\\
&\iff -\cos(2t) \leqslant 0\\
&\iff 2t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\
&\iff t\left]0, \frac{\pi}{4}\right].
\end{aligned}$$

C'est-à-dire en tenant compte des calculs précédents

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x'(t) \geqslant 0 \iff t\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$$



4.