

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. On définit, pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, la matrice A_a par

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. **Justifier sans calcul que A_1 est diagonalisable.**

Lorsque $a = 1$, la matrice A_1 est symétrique à coefficients réels, donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

2. **Soit a un réel. Calculer $A_a U_1$. En déduire que 2 est valeur propre de A_a .**

$$A_a U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 0 \times 1 + a \times 0 \\ 0 \times 0 + 2 \times 1 + 0 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc 2 est valeur propre de A_a et U_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

3. **Soit a un réel. Déterminer le polynôme caractéristique de A_a .**

$$P_{A_a}(X) = \text{Det}(X I_3 - A_a) = \begin{vmatrix} X & 0 & -a \\ 0 & X - 2 & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

par développement par rapport à la deuxième colonne ,

$$P_{A_a}(X) = (-1)^{2+2}(X - 2) \begin{vmatrix} X & -a \\ -1 & X \end{vmatrix}$$

$$P_{A_a}(X) = (X - 2)(X^2 - a)$$

4. **Donner, en discutant selon les valeurs du réel a , les valeurs propres réelles de A_a et leurs ordres de multiplicité.** On recopiera et on complétera le tableau synthétique suivant.

- Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et $X^2 - a$ est irréductible sur \mathbb{R} . Donc le polynôme caractéristique n'est pas scindé et a pour seule racine réelle le nombre 2.
- Si $a = 0$, $P_{A_a}(X) = (X - 2)(X^2)$
- Si $a > 0$, $P_{A_a}(X) = (X - 2)(X^2 - a) = (X - 2)(X - \sqrt{a})(X + \sqrt{a})$

Remarque : $\sqrt{4} = 2$

Cas	Valeurs propres réelles de A_a et ordres de multiplicité
$a < 0$	2 est valeur propre de multiplicité 1
$a = 0$	2 est valeur propre de multiplicité 1 et 0 est valeur propre de multiplicité 2
$a > 0$ et $a \neq 4$	2 est valeur propre de multiplicité 1 \sqrt{a} est valeur propre de multiplicité 1 et $-\sqrt{a}$ est valeur propre de multiplicité 1
$a > 0$ et $a = 4$	2 est valeur propre de multiplicité 2 et -2 est valeur propre de multiplicité 1

5. (a) **Justifier que si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors A_a est diagonalisable.**

si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors P_{A_a} est scindé et à racines simples, donc A_a est diagonalisable.

(b) **Déterminer une base du noyau de A_0 . La matrice A_0 est-elle diagonalisable? Est-elle trigonalisable?**

Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^3 .

$u \in \text{Ker}A_0$

ssi $A_0u = 0$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} 0 = 0 \\ 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\text{Ker } A_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

0 est valeur propre de multiplicité 2 et $\text{DimKer } A_0 = 1 < 2$, donc A_0 n'est pas diagonalisable.

$P_{A_0} = (X - 2)X^2$ est scindé donc A_0 est trigonalisable.

6. Étude de la matrice A_4 .

- (a) **Déterminer une matrice colonne $U_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_1, U_2) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre 2.**

Methode 01 (si je n'ai pas lu la question (c)!!!)

Je pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^3

$$A_4 u = 2u$$

$$\text{ssi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} 4z = 2x \\ 2y = 2y \\ x = 2z \end{cases}$$

ssi

$$x = 2z$$

donc

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{posons } U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Methode 02 (si j'ai lu la question (c)) d'où l'importance de lire la question entièrement.

$$\text{Posons } U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et vérifions

$$A_4 U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times \frac{1}{2} \\ 2 \times 0 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U_2$$

puis

De plus U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires donc la famille (U_1, U_2) est libre dans l'espace propre E_2 de dimension inférieure ou égale à 2.

C'est donc une base de E_2 .

- (b) **Déterminer une matrice colonne $U_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_3) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre -2 .**

Methode 01 (si je n'ai pas lu la question (c)!!!)

$$\text{Je pose } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vecteur de } \mathbb{R}^3$$

$$A_4 u = -2u$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} 4z = -2x \\ 2y = -2y \\ x = -2z \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = -2z \\ -y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$$

donc

$$E_{-2} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{posons } U_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Methode 02 (si j'ai lu la question (c))

Posons $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et vérifions

$$A_4 U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times (-\frac{1}{2}) \\ 2 \times 0 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2U_3$$

(c) Calculer la matrice inverse de $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow -L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc l'inverse de P est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) Trouver une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A_4 = PDP^{-1}$.

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3

et P la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, U_3)$.

Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $A_a = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

et D la matrice de f dans la base \mathcal{B}'

P^{-1} est alors la matrice de passage de la base \mathcal{B}' vers la base \mathcal{B}

et, d'après le théorème de changement de bases,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

ie

$$A_4 = PDP^{-1}.$$

$$\text{enfin } D = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{matrix} \begin{matrix} f(U_1) & f(U_2) & f(U_3) \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

$$\text{ie } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$
par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$, $w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 4v_n \\ w_{n+1} = u_n + 2w_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier naturel n , la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

7. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de v_n , en fonction de n .**

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 4v_n,$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 4.

$$\text{ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4^n v_0 = (-1)4^n$$

8. (a) **Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = BX_n$.**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{ie } X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2u_n + 4w_n \\ 4v_n \\ u_n + 2w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) **Déterminer deux nombres réels a et b tels que $B = A_a + bI_3$.**

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = A_4 + 2I_3.$$

Donc $a = 4$ et $b = 2$.

(c) **En déduire que X_0 est un vecteur propre de la matrice B associé à une valeur propre que l'on précisera.**

$$X_0 = -U_1 + 2U_2 \text{ donc } X_0 \in \text{Vect}(U_1, U_2)$$

$$\text{par conséquent, } A_4 X_0 = 2X_0$$

$$BX_0 = (A_4 + 2I_3) X_0 = A_4 X_0 + 2I_3 X_0 = 2X_0 + 2X_0 = 4X_0$$

Donc X_0 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 4.

(d) **En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n .**

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = 4^n X_0$$

Initialisation

$$X_0 = 1X_0 = 4^0 X_0$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ supposons que } X_n = 4^n X_0$$

$$\text{Alors } X_{n+1} = BX_n = B(4^n X_0) = 4^n (BX_0) = 4^n (4X_0) = 4^{n+1} X_0$$

Conclusion

La propriété est initialisé et héréditaire donc d'après un raisonnement par récurrence, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = 4^n X_0$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = 4^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4^n \\ (-1)4^n \\ 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Lieux de points

Les trois questions de cette partie peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \frac{-3 + 2\sqrt{3}i}{3}$. **Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A , B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral.**

Calculons $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$.

$$f(a) = f(1) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(b) = f(-3) = \frac{(-3)-1}{(-3)+1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$f(c) = f\left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}i}{3}\right) = \frac{\left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}i}{3}\right) - 1}{\left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}i}{3}\right) + 1} = \frac{(-3 + 2\sqrt{3}i) - 3}{(-3 + 2\sqrt{3}i) + 3} = \frac{-6 + 2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$$

donc

$$f(c) = \frac{6}{2\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{i}\right) + \frac{2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = (\sqrt{3})(i) + 1$$

donc

$$f(c) = 1 + (\sqrt{3})i$$

Montrons que ABC est un triangle équilatéral.

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + (\sqrt{3})i - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Le nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ a donc pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{3}$.

On en déduit que $\frac{AC}{AB} = 1$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc le triangle ABC a deux cotés de même longueur formant un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, c'est donc un triangle équilatéral.

2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.

Considérons les points C d'affixe $z_C = 1$ et D d'affixe $z_D = -1$

$$f(z) \in \mathbb{U}$$

$$\text{ssi } |f(z)| = 1$$

$$\text{ssi } \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1$$

$$\text{ssi } \frac{|z-1|}{|z-(-1)|} = 1$$

$$\text{ssi } \frac{|z_M - z_C|}{|z_M - z_D|} = 1$$

$$\text{ssi } \frac{CM}{DM} = 1$$

$$\text{ssi } CM = DM$$

donc le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ est la médiatrice du segment $[CD]$, il s'agit de l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$).

3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$

$$\text{Posons } z = x + iy$$

$$\text{ssi } |f(z)| = \sqrt{2}$$

$$\text{ssi } \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \sqrt{2}$$

$$\text{ssi } \frac{|z-1|}{|z+1|} = \sqrt{2}$$

$$\text{ssi } |z-1| = \sqrt{2}|z+1|$$

$$\text{ssi } |x + iy - 1|^2 = 2|x + iy + 1|^2$$

$$\text{ssi } (x-1)^2 + y^2 = 2((x+1)^2 + y^2)$$

$$\text{ssi } x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$\text{ssi } x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2$$

$$\text{ssi } 0 = x^2 + 6x + y^2 + 1$$

$$\text{ssi } 0 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 9 - 9 + y^2 + 1$$

$$\text{ssi } 0 = (x + 3)^2 + y^2 - 8$$

$$\text{ssi } (x + 3)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$$

Conclusion :

Le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre $\Omega(-3; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Partie B Étude d'une suite récurrente

1. (a) **Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω .**

Montrons que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = 1$$

$$\text{ssi } \frac{z-1}{z+1} = 1$$

$$\text{ssi } z - 1 = z + 1$$

$$\text{ssi } 0 = 2$$

ce qui est faux quelque soit $z \in \mathbb{C}$.

Donc l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution dans \mathbb{C} .

Résolution de $f(z) = \omega$ pour $\omega \neq 1$

$$f(z) = \omega$$

$$\text{ssi } \frac{z-1}{z+1} = \omega$$

$$\text{ssi } z - 1 = \omega(z + 1)$$

$$\text{ssi } z - 1 = \omega z + \omega$$

$$\text{ssi } (1 - \omega)z = 1 + \omega$$

$$\text{ssi } z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}$$

Donc l'équation $f(z) = \omega$ admet pour unique solution $z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}$.

(b) La fonction f est-elle injective? Surjective?

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = \omega$ admet aucune ou une unique solution donc f est injective de \mathbb{C} vers \mathbb{C} .

$1 \in \mathbb{C}$ n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective de \mathbb{C} vers \mathbb{C} .

(c) Montrer que pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ à valeurs dans \mathbb{C} .

$f(0) = -1$ et $f(1) = 0$

donc -1 a pour antécédent 0 et 0 a pour antécédent 1 . De plus, d'après la question 1.(a), 1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Enfin, f est injective, donc f restreinte à $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ est à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Ou encore :

Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

$$f(z) = z$$

$$\text{ssi } \frac{z-1}{z+1} = z$$

$$\text{ssi } z-1 = z(z+1)$$

$$\text{ssi } z-1 = z^2+z$$

$$\text{ssi } z^2 = -1$$

$$\text{ssi } z = i \text{ ou } z = -i$$

L'ensemble de solution est $\{-i; i\}$

(b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?

Si $u_0 = i$ alors $u_1 = i$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i$ et la suite est stationnaire.

De même, si $u_0 = -i$, la suite est constante ou stationnaire.

(c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.

Soit $u_0 \notin \{-i, i\}$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.

Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 \notin \{-i, i\}$ par hypothèse.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $u_n \notin \{-i, i\}$.

Alors

$u_n \neq i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq i$

et

$u_n \neq -i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq -i$.

donc $u_{n+1} \notin \{-i, i\}$

Conclusion

D'après un raisonnement par récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin \{-i, i\}$$

On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$ et on introduit la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}$$

D'après la question précédente, la suite (v_n) est bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n , on a $u_n \neq -i$.

3. (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-i$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - i}{u_{n+1} + i} \\ &= \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} - i}{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} + i} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n - 1 - i(u_n + 1)}{u_n - 1 + i(u_n + 1)} \\ &= \frac{u_n - 1 - iu_n - i}{u_n - 1 + iu_n + i} \\ &= \frac{(1 - i)u_n - (1 - i)(i)}{(1 + i)u_n + (1 + i)i} \\ v_{n+1} &= \frac{1 - i}{1 + i} \frac{u_n - i}{u_n + i} \\ &= \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} v_n \\ &= \frac{-2i}{2} v_n \\ v_{n+1} &= (-i)v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -i$.

- (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-i)^n v_0.$$

$$\text{or } (-i)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ -i & \text{si } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ i & \text{si } n = 4k + 3, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{et } v_0 = \frac{u_0 - i}{u_0 + i}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \begin{cases} v_0 & \text{si } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ (-i)v_0 = v_1 & \text{si } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N} \\ -v_0 = v_2 & \text{si } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ iv_0 = v_3 & \text{si } n = 4k + 3, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Donc la suite (v_n) est périodique de période 4

Considérons les points du plan complexe, A d'affixe v_0 , D d'affixe v_1 , C d'affixe v_2 , et B d'affixe v_3 .

Alors

$$z_B = iz_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A$$

$$z_C = iz_B = e^{i\frac{\pi}{2}} z_B$$

$$z_D = iz_C = e^{i\frac{\pi}{2}} z_C$$

Donc A, B, C et D sont les quatre sommets d'un carré dont l'intersection des diagonales est le centre du repère O .

(c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}$$

donc

$$v_n(u_n + i) = u_n - i$$

d'où

$$v_n u_n + v_n \times i = u_n - i$$

donc

$$u_n v_n - u_n = -i v_n - i$$

donc

$$u_n(v_n - 1) = -i v_n - i$$

d'où

$$u_n = -i \frac{v_n + 1}{v_n - 1}$$

La suite (v_n) est périodique de période 4 donc la suite (u_n) est périodique de période 4.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + mxy'(x) + y(x) = x^2 \quad (E_m)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} , où m est un paramètre réel.

On note (H_m) l'équation homogène associée à (E_m)

$$y''(x) + mxy'(x) + y(x) = 0. \quad (H_m)$$

Les parties A, B, C et D de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Étude du cas $m = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H_0) .

Considérons (H_0) : $y'' + y = 0$

et son équation caractéristique (e) $r^2 + 1 = 0$

L'équation (e) admet deux solutions complexes conjuguées $-i = 0 + (-1)i$ et $i = 0 + 1i$, donc l'équation homogène (H_0) a pour solution générale

$$y_0(x) = (A \cos(x) + B \sin(x))e^{0x} = A \cos(x) + B \sin(x)$$

où A et B sont des constantes réelles.

2. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (E_0) définie sur \mathbb{R} de la forme $y(x) = x^2 + ax + b$, où a et b sont des réels à déterminer.

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 + ax + b$, où a et b sont des réels.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + a$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 2$

f est solution de l'équation différentielle (E_0)

ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = x^2$.

ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $2 + x^2 + ax + b = x^2$.

par identification des coefficients, on obtient

$$\begin{cases} 1 & = & 1 \\ a & = & 0 \\ b + 2 & = & 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a & = & 0 \\ b & = & -2 \end{cases}$$

et une solution particulière de (E_0) est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2$

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0) .

On en déduit que la solution générale de (E_0) est définie par

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + x^2 - 2$$

où A et B sont des constantes réelles.

4. Donner l'unique solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E_0) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

On cherche y solution de (E_0) donc y est de la forme

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + x^2 - 2$$

ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = -A \sin x + B \cos x + 2x$$

De plus $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

d'où

$$\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 + 0^2 - 2 & = & 0 \\ -A \sin 0 + B \cos 0 + 2 \times 0 & = & 1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} A - 2 & = & 0 \\ B & = & 1 \end{cases}$$

Conclusion :

L'unique solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E_0) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est définie sur \mathbb{R} par

$$y(x) = 2 \cos x + \sin x + x^2 - 2$$

Partie B - Étude du cas $m = 1$

Dans les trois premières questions de cette partie, on cherche les séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle homogène (H_1) et pour lesquelles $a_1 = 0$.

1. Montrer que la suite des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

Considérons la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \in [0; +\infty[$.

alors la fonction y définie sur $] -R; R[$ par $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R; R[$

et $\forall x \in] -R; R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

et

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Une telle fonction est solution de (H_1)

$$\text{ssi } \forall x \in] -R; R[, \quad y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in] -R; R[, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \times \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

(en faisant le changement de variable $n' = n - 2$ dans la première somme et en distribuant x dans la deuxième somme)

$$\text{ssi } \forall x \in] -R; R[,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

(en traitant à part le cas $n = 0$)

$$\text{ssi } \forall x \in] -R; R[,$$

$$2 \times 1 \times a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

(en regroupant les sommes)

$$\text{ssi } \forall x \in]-R; R[, \quad 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n] x^n = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in]-R; R[, \quad 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n] x^n = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in]-R; R[, \quad 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) [(n+2)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

Puis, par identification des coefficients,

$$\text{pour } n = 0 \quad 2a_2 + a_0 \text{ donc } a_2 = -\frac{1}{2}a_0$$

$$\text{Enfin pour } n \geq 1 \quad (n+1) ((n+2)a_{n+2} + a_n) = 0 \text{ donc } (n+2)a_{n+2} + a_n = 0$$

$$\text{ie } a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}a_n$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}a_n$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$.

Initialisation

pour $n = 0$,

$$a_{2 \times 0} = a_0 \text{ et } \frac{(-1)^0}{2^0 0!} a_0 = \frac{1}{1 \times 1} a_0 = a_0$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{supposons que } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0,$$

alors, d'après la question précédente,

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = -\frac{1}{(2n)+2} a_{2n} = -\frac{1}{2(n+1)} \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$$

donc

$$a_{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2 \times 2^n) \times ((n+1) \times n!)} a_0$$

donc

$$a_{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \times (n+1)!} a_0$$

Conclusion

Par principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = 0$.

Initialisation

pour $n = 0$,

$$a_{2 \times 0 + 1} = 0$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $a_{2n+1} = 0$,

alors, d'après la question précédente,

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = -\frac{1}{(2n+1)+2} a_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)+2} 0 = 0$$

Conclusion

Par principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = 0$.

3. Donner une expression simple de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en fonction de x et a_0 .

Considérons la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \in [0; +\infty]$

solution de (H_0) .

alors la fonction y définie sur $] -R; R[$ par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0 x^{2n}$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^n}{n! 2^n}.$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n.$$

Enfin,

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((-1)\frac{x^2}{2}\right)^n.$$

On reconnaît le développement en série entière de la fonction exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

On en conclut que la fonction recherchée est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$y(x) = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Partie C Résolution approchée d'un problème de Cauchy

Soit N un entier naturel non nul. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation (E_0) , avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ par la méthode d'Euler, en prenant un pas égal à $1/N$. On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1/N$ et la relation de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de N , n , u_n et u_{n+1} .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = \frac{n^2}{N^2} - u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = \frac{n^2}{N^4} - \frac{1}{N^2}u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n^2}{N^4} - \frac{1}{N^2}u_n + 2u_{n+1} - u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n^2}{N^4} + 2u_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{N^2}\right)u_n$$

2. Écrire une fonction `cauchy`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur $[u_0, u_1, \dots, u_N]$.

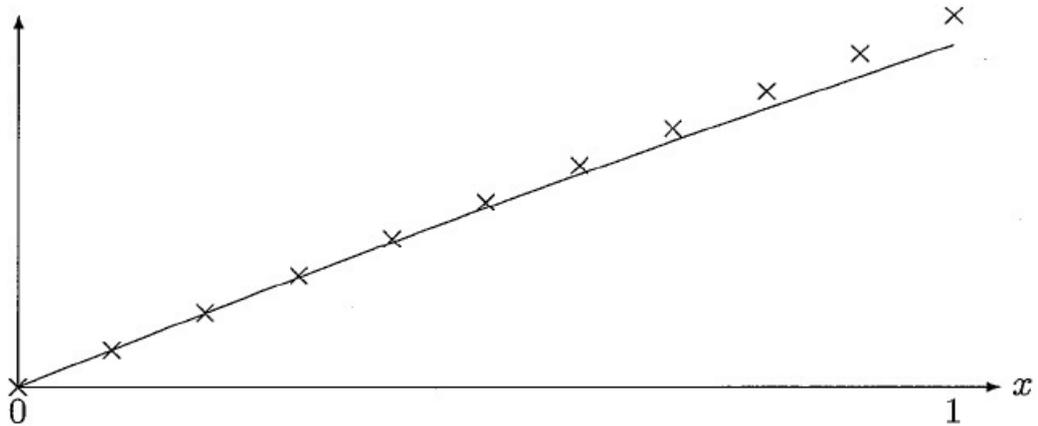
```
N=10
u0=0
u1=1/N

function Res=cauchy(u0,u1,N)
    L=[u0,u1]
    N2=N*N
    N4=N2*N2
    v0=u0
    v1=u1
    for n=2:N
        v2=n*n/N4+2*v1-(1+1/N2)*v0
        L=[L v2]
        v0=v1
        v1=v2
    end
    Res=L
endfunction

disp(cauchy(u0,u1,N))

// illustration
x=[0:1/N:1]
plot(x,2*cos(x)+sin(x)+x^2-2,"-",x,cauchy(u0,u1,N),"x")
```

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 1]$, ainsi que les points de coordonnées $(k/N, u_k)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ (ici, on a choisi $N = 10$).



3. Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée ?
 Quel est l'impact sur le temps de calcul ?

Pour améliorer la solution approchée, il suffit d'augmenter la valeur de N .
 L'impact sera une augmentation du temps de calcul.

Partie D - Existence d'une solution polynomiale non nulle

L'objectif de cette partie est de trouver les valeurs de m pour lesquelles l'équation différentielle homogène (H_m) admet au moins une solution polynomiale non nulle.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, qu'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m) . Montrer que $d \neq 0$ et que $m = -1/d$.

Supposons qu'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m) .

$$\text{Alors } P'' + mXP' + P = 0$$

Si P est constant,

$$\text{alors } P = c \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } P' = P'' = 0$$

$$\text{alors } P'' + mXP' + P = 0 + mX \times 0 + c = 1$$

donc si P est solution alors $c = 0$ et $P = 0$.

Conclusion :

La solution polynomiale non nulle de (H_m) n'est pas constante et $d \neq 0$.

Soit $d \neq 0$ le degré de P .

Alors $P = a_d X^d + Q$, avec $\deg(Q) \leq d - 1$

et $P' = da_d X^{d-1} + Q'$, avec $\deg(Q') \leq d - 2 \leq d - 1$

donc

$$\begin{aligned} P'' + mXP' + P &= P'' + mX(da_d X^{d-1} + Q') + a_d X^d + Q \\ &= P'' + mda_d X^d + mXQ' + a_d X^d + Q \end{aligned}$$

donc

$$P'' + mXP' + P = (md + 1)a_d X^d + P'' + mXQ' + Q$$

$$\deg(P'' + mXQ' + Q) \leq \max(\deg(P''), \deg(mXQ'), \deg(Q)) \leq d - 1 < d$$

Par conséquent ,

Si $P'' + mXP' + P = 0$, alors $(md + 1)a_d = 0$

or $a_d \neq 0$, donc $md + 1 = 0$ et $d = -\frac{1}{m}$ ou $m = -\frac{1}{d}$

Conclusion

S'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m) , alors $d \neq 0$ et que $m = -1/d$.

Dans les questions qui suivent, nous allons étudier le résultat réciproque.

On fixe un entier naturel non nul $d \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite montrer que $(H_{-1/d})$ admet une solution polynomiale non nulle.

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur à d , et on considère l'application $h : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad h(P) = P'' - \frac{1}{d}XP' + P$$

2. (a) Donner sans justification la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$.

$$\dim(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1$$

justification non demandée :

La base canonique de $\mathbb{R}_d[X]$ est $(1, X, \dots, X^d)$.

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a $\deg h(P) \leq d - 1$.

Tout d'abord

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $h(P) = P'' - \frac{1}{d}XP' + P \in \mathbb{R}[X]$

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_d[X]$,

Alors $P = a_dX^d + Q$, avec $a_d \in \mathbb{R}$ et $\deg(Q) \leq d - 1$

puis $P' = da_dX^{d-1} + Q'$, avec $\deg(Q') \leq d - 2$

donc

$$\begin{aligned} P'' - \frac{1}{d}XP' + P &= P'' - \frac{1}{d}X(da_dX^{d-1} + Q') + a_dX^d + Q \\ &= P'' - \frac{1}{d}da_dX^d + mXQ' + a_dX^d + Q \end{aligned}$$

donc

$$P'' - \frac{1}{d}XP' + P = (-1 + 1)a_dX^d + P'' - \frac{1}{d}XQ' + Q = P'' - \frac{1}{d}XQ' + Q$$

par conséquent,

$$\deg(P'' - \frac{1}{d}XP' + P) = \deg(P'' - \frac{1}{d}XQ' + Q)$$

donc

$$\begin{aligned} \deg(P'' - \frac{1}{d}XP' + P) &\leq \max(\deg(P''), \deg(-\frac{1}{d}XQ'), \deg(Q)) \\ &\leq \max(d - 2, 1 + d - 2, d - 1) \leq d - 1 \end{aligned}$$

ie

$$\deg(P'' - \frac{1}{d}XP' + P) \leq \max(d - 2, 1 + d - 2, d - 1) \leq d - 1$$

Donc

$$\deg(h(P)) \leq d - 1$$

(c) Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.

Tout d'abord, d'après la question précédente,

si $P \in \mathbb{R}_d[X]$, alors $h(P) \in \mathbb{R}_{d-1}[X] \subset \mathbb{R}_d[X]$

De plus,

Si on considère $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_d[X]$, alors

$$\begin{aligned} h(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' - \frac{1}{d}X(\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q) \\ &= (\lambda P'' + Q'') - \frac{1}{d}X(\lambda P' + Q') + (\lambda P + Q) \\ &= \lambda P'' + Q'' - \frac{1}{d}X\lambda P' - \frac{1}{d}XQ' + \lambda P + Q \\ &= \lambda(P'' - \frac{1}{d}XP' + P) + (Q'' - \frac{1}{d}XQ' + Q) \\ &= \lambda h(P) + h(Q) \end{aligned}$$

Donc h est linéaire

Conclusion

h est une application linéaire de $\mathbb{R}_d[X]$ vers $\mathbb{R}_d[X]$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.

3. Montrer que l'application linéaire h n'est pas surjective.

D'après la question 2.(b),

pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, $\deg(h(P)) \leq d - 1$

donc X^d n'a pas d'antécédent par h

par conséquent

h n'est pas surjective.

4. En déduire l'existence d'une solution polynomiale non nulle de l'équation différentielle homogène $(H_{-1/d})$.

h est un endomorphisme non surjectif de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ de dimension finie.

Or un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est surjectif ssi il est injectif

donc h n'est pas injectif

donc $\text{Ker}(h) \neq \{0\}$

donc il existe $P \neq 0$ tel que $h(P) = 0$

Conclusion

Il existe un polynôme non nul P tel que $P'' - \frac{1}{d}XP' + P = 0$

et l'équation différentielle homogène $(H_{-1/d})$ admet une solution polynomiale non nulle.

Exercice 4

On rappelle que la *partie entière* d'un nombre réel x , notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\lfloor x + 1 \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

considérons $n = \lfloor x \rfloor$

alors $n \leq x < n + 1$

puis $n + 1 \leq x + 1 < n + 2$

et $\lfloor x + 1 \rfloor = n + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$.

Conclusion

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

- (b) Montrer que la fonction f est périodique de période 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(x + 1) = (x + 1) - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor + 1 - 1 = f(x)$

Donc f est périodique de période 1.

- (c) Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0, 1[$ et préciser la valeur de $f(1)$.

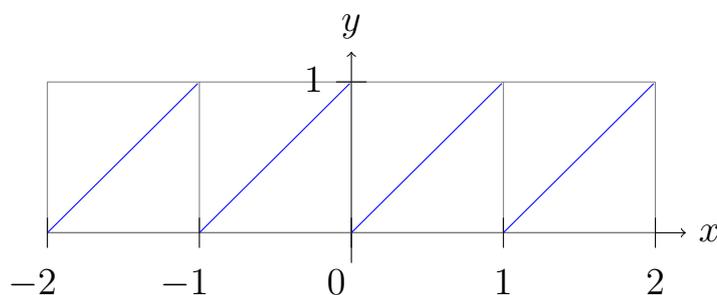
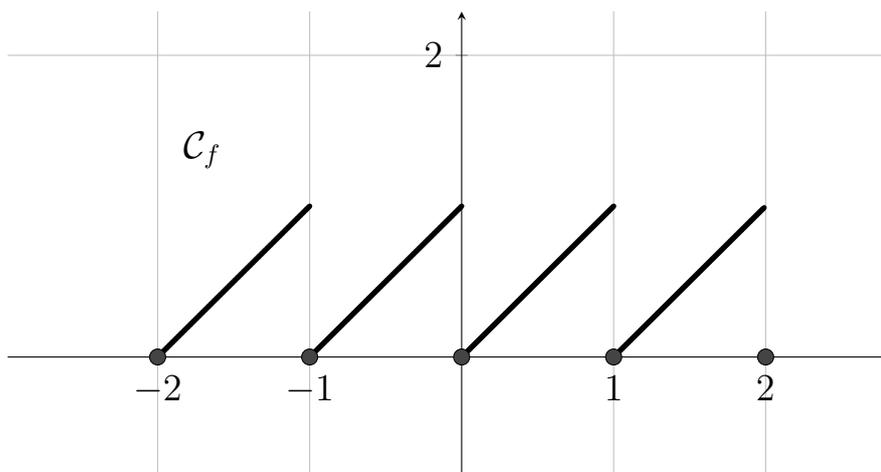
Soit $x \in [0, 1[$

$f(x) = x - \lfloor x \rfloor = x - 0 = x$

De plus, par périodicité,

$f(1) = f(0 + 1) = f(0) = 0$

(d) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$.



(e) La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier.

La fonction f n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ or $f(1) = 0 \neq 1$
 Par conséquent, f n'est pas continue sur \mathbb{R} .

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx))$$

la série de Fourier de la fonction f .

2. (a) Calculer le coefficient a_0 .

La fonction f est périodique de période $T = 1$ et a donc pour pulsation $\omega = 2\pi/T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = 1 \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $a_n = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x \cos(2n\pi x) dx$$

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi x)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$

$$v(x) = \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi x) \qquad v'(x) = \cos(2n\pi x)$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 uv'(x) dx = [uv(x)]_0^1 - \int_0^1 u'v(x) dx$$

$$a_n = 2 \left(\left[\frac{1}{2n\pi} x \sin(2n\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \sin(2n\pi x) dx \right)$$

d'où

$$a_n = 2 \left(\left[\frac{1}{2n\pi} x \sin(2n\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{2n\pi} \left[-\frac{1}{2n\pi} \cos(2n\pi x) \right]_0^1 \right)$$

donc

$$a_n = 2 \left(\left(\left(\frac{1}{2n\pi} 1 \sin(2n\pi) \right) - \left(\frac{1}{2n\pi} 0 \sin 0 \right) \right) + \frac{1}{(2n\pi)^2} (\cos(2n\pi) - \cos 0) \right)$$

donc

$$a_n = 2 \left(\left(\left(\frac{1}{2n\pi} 0 \right) - \left(\frac{1}{2n\pi} 0 \right) \right) + \frac{1}{(2n\pi)^2} (1 - 1) \right)$$

donc $a_n = 0$

(c) Calculer les coefficients b_n .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin(2n\pi x) dx$$

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{2n\pi} \cos(2n\pi x)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$

$$v(x) = -\frac{1}{2n\pi} \cos(2n\pi x) \quad v'(x) = \sin(2n\pi x)$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 uv'(x)dx = [uv(x)]_0^1 - \int_0^1 u'v(x)dx$$

$$b_n = 2 \left(\left[-\frac{1}{2n\pi} x \cos(2n\pi x) \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{2n\pi} \right) \int_0^1 \cos(2n\pi x) dx \right)$$

d'où

$$b_n = 2 \left(\left[-\frac{1}{2n\pi} x \cos(2n\pi x) \right]_0^1 + \frac{1}{2n\pi} \left[+\frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi x) \right]_0^1 \right)$$

donc

$$b_n =$$

$$2 \left(\left(\left(-\frac{1}{2n\pi} 1 \cos(2n\pi) \right) - \left(-\frac{1}{2n\pi} 0 \cos 0 \right) \right) + \frac{1}{(2n\pi)^2} (\sin(2n\pi) - \sin 0) \right)$$

donc

$$b_n = 2 \left(\left(\left(-\frac{1}{2n\pi} 1 \right) - 0 \right) + \frac{1}{(2n\pi)^2} (0 - 0) \right)$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

- (d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.

La fonction f est une fonction périodique de période 1 et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout point.

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h))$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. (a) Justifier la convergence de la série numérique $U = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ de terme

$$\text{général } u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

La suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, à valeurs positives et de limite égale à 0 en $+\infty$,

donc,

d'après le critère spécial des séries alternées,

la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ est convergente.

(b) Trouver une relation entre U et $Sf(1/4)$.

$$Sf(1/4) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(1/4)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \left(n\omega \frac{1}{4} \right) + b_n \sin \left(n\omega \frac{1}{4} \right) \right) \right)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left(0 + \left(-\frac{1}{n\pi} \right) \sin \left(2n\pi \frac{1}{4} \right) \right) \right)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left(0 + \left(-\frac{1}{n\pi} \right) \sin \left(n\frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^N \left(0 + \left(-\frac{1}{(2k+1)\pi} \right) \sin \left((2k+1)\frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

$$\text{car } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin \left((2k)\frac{\pi}{2} \right) = \sin(k\pi) = 0$$

Donc

$$Sf(1/4) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi} \right) \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2k+1} \right) (-1)^k$$

$$Sf(1/4) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi} \right) \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

$$\text{Posons désormais } U = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

Alors

$$Sf(1/4) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi} \right) U$$

(c) Montrer que $U = \pi/4$.

$1/4 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ donc $Sf(1/4) = 1/4$

Ainsi

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi}\right) U$$

d'où

$$-\frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{\pi}\right) U$$

donc

$$\frac{\pi}{4} = U$$

Conclusion

$$U = \frac{\pi}{4}$$

4. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

si f est une fonction T -périodique et continue par morceaux sur \mathbb{R} , alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

(b) Calculer la somme $V = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

La fonction f de cet exercice est périodique de période 1 et continue par morceaux sur \mathbb{R} , donc d'après le théorème de Parseval, les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et :

$$\frac{1}{1} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

donc

$$\frac{1}{1} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 + \left(-\frac{1}{n\pi}\right)^2\right)$$

donc

$$\int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

donc

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

donc

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

donc

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Conclusion

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
