$\boxed{\textsc{Concours ATS 2021}}$

$\boxed{\textsc{Corrigé}}$

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. Pour tous réels a et b, on définit la matrice

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On définit par ailleurs l'ensemble des matrices suivant :

$$F = \left\{ P(a,b) : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On pose enfin

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traités de manière indépendante.

Partie A — Étude de l'ensemble F et de la matrice N

1. Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à l'ensemble F.

   $I_3 = P(1,0)$ et $N = P(0,1)$ donc

   $\boxed{I_3 \text{ et } N \text{ appartiennent à l'ensemble } F.}$

2. Montrer que l'ensemble F forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I_3, N) est une base de F.

   Montrons que l'ensemble F forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Soit $M \in F$,

   alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = P(a,b)$

   alors $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix} = aI_3 + bN$

et donc $M \in \text{Vect}(I_3, N)$.

Ainsi $F \subset \text{Vect}(I_3, N)$.

De plus $\text{Vect}(I_3, N) \subset F$.

Conclusion :

$F = \text{Vect}(I_3, N)$ donc

$\boxed{F \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

Montrons que (I_3, N) est une base de F.

$F = \text{Vect}(I_3, N)$ donc (I_3, N) est une famille génératrice de F.

De plus, aucune combinaison linéaire non triviale ne lie I_3 et N, donc (I_3, N) est libre.

Conclusion:

$\boxed{(I_3, N) \text{ est une famille libre et génératrice de } F\text{, c'est donc une base de } F.}$

3. Donner deux réels a et b tels que $N^2 = aI_3 + bN$. Quelles sont les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) ?

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $N^2 = 2I_3 + 1N$.

Conclusion:

$\boxed{\text{les coordonnées de } N^2 \text{ dans la base } (I_3, N) \text{ sont } (2; 1).}$

4. (a) Montrer que N est inversible, que son inverse N^{-1} appartient à l'ensemble F et donner les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3, N) de F.
   Indication : on pourra utiliser la question précédente.

   $N^2 = 2I_3 + 1N$

   donc $N^2 - N = 2I_3$

   donc $(N - I_3)N = 2I_3$

   donc $\left(\frac{1}{2}(N - I_3)\right) N = I_3$

   Ainsi $\boxed{N \text{ est inversible}}$

   De plus $N^{-1} = \left(\frac{1}{2}(N - I_3)\right)$

   donc $N^{-1} = -\frac{1}{2}I_3 + \frac{1}{2}N$

   $\boxed{\text{les coordonnées de } N^{-1} \text{ dans la base } (I_3, N) \text{ sont } \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).}$

   Non demandé :

et $N^{-1} = \left(\frac{1}{2}(N - I_3)\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) Le réel 0 est-il valeur propre de N ?

N est inversible donc injective. Par conséquent, $\mathrm{Ker}N = \{0\}$.

Donc aucun vecteur non nul ne vérifie $Nu = 0$ et

$\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } N.}$

5. Justifier que N est diagonalisable. *Cette question n'exige aucun calcul.*

N est une matrice symétrique à coefficients réels, donc, d'après le théorème spectral, $\boxed{N \text{ est diagonalisable.}}$

6. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice N.

$$P_N(X) = \mathrm{Det}(XI_3 - N) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$P_N(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ X-2 & X & -1 \\ X-2 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_2 - L_1$

$$P_N(X) = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix}$$

en utilisant la formule du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure

$P_N(X) = (X-2)(X+1)^2$

Donc

le polynôme caractéristique de N est $\boxed{P_N(X) = (X-2)(X+1)^2}$.

(b) Montrer que N admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2 et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?

le polynôme caractéristique de N, $P_N(X) = (X-2)(X+1)^2$ admet pour racines $\lambda_1 = -1$, de multiplicité 2 et $\lambda_2 = 2$ de multiplicité 1.

Par conséquent,

$\boxed{N \text{ admet deux valeurs propres}}$:

- $\boxed{\lambda_1 = -1, \text{ de multiplicité } 2}$

et

- $\boxed{\lambda_2 = 2 \text{ de multiplicité } 1.}$

(c) En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible vérifiant $N = PDP^{-1}$. *On ne cherchera à calculer ni la matrice P ni son inverse P^{-1}.*

Méthode 1

Nous avons vu que N est diagonalisable, donc d'après son polynôme caractéristique, en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible vérifiant $N = PDP^{-1}$.

$$\boxed{N = PDP^{-1}}$$

Méthode 1

le polynôme caractéristique de N, $P_N(X)(X-2)(X+1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}$ donc N est diagonalisable ssi $\text{Dim}(E_2) = 1$ et $\text{Dim}(E_{-1}) = 2$.
$\lambda_2 = 2$ est racine de P_N de multiplicité 1 donc $\text{Dim}(E_2) = 1$ et il existe un vecteur $u_1 \neq 0$ tel que $u_1 \in E_2$.

Soit $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

$u \in E_{-1}$ ssi $Nu = -u$

ssi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z = -x \\ x \phantom{{}+y} + z = -y \\ x + y \phantom{{}+z} = -z \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

ssi $z = -x - y$

donc $E_{-1} = \text{Vect}\left(u_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$u_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc $\text{Dim}E_{-1} = 2$

par conséquent, N est diagonalisable.

Ainsi, si on considère $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$,
si on appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

si on pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

alors il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

alors, d'après le théorème de changement de base,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

c'est à dire

$$\boxed{N = PDP^{-1}}$$

7. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n = P(a_n, b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Considérons les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par

$a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}, N^n = P(a_n, b_n)$

Initialisation: pour $n = 0$,

$N^0 = I_3 = 1I_3 + 0N = a_0 I_3 + b_0 N$

donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $N^n = P(a_n, b_n)$,

alors

$N^{n+1} = N^n N = P(a_n, b_n) N = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$N^{n+1} = \begin{pmatrix} 2b_n & a_n + b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & 2b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n + b_n & 2b_n \end{pmatrix}$

ie $N^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$

ie $N^{n+1} = P(a_{n+1}, b_{n+1})$

Conclusion :

Par principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, N^n = P(a_n, b_n)}.$$

On notera dans la suite de l'exercice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Déterminer une matrice diagonale B dont les termes diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible Q de taille 2×2 dont la deuxième ligne est $(1, 1)$, telles que $A = QBQ^{-1}$.

   <u>Recherche du polynôme caractéristique de A.</u>

   $P_A(X) = \text{Det}(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X & -2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$

   $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

   $P_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -2 \\ X-2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix}$

   $P_A(X) = (X-2)((X-1) - (-2)) = (X-2)(X+1)$

   <u>Recherche de l'espace propre E_{-1}.</u>

   Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

   $u \in E_{-1}$ ssi $Au = -u$

   ssi $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   ssi $\begin{cases} & + & 2y & = & -x \\ x & + & y & = & -y \end{cases}$

   ssi $\begin{cases} x & + & 2y & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 0 \end{cases}$

   ssi $x = -2y$

   Conclusion :

   $E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Recherche de l'espace propre E_2.

Soit $u\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$u \in E_2$ ssi $Au = 2u$

ssi $\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} & + & 2y & = & 2x\\ x & + & y & = & 2y\end{cases}$

ssi $\begin{cases} -2x & + & 2y & = & 0\\ x & - & y & = & 0\end{cases}$

ssi $x = y$

Conclusion :

$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

Définition de Q et B

Posons $B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

Conclusion :

$$A = QBQ^{-1}$$

Justification de la formule

A ne pas détailler sur la copie

Nommons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ la base de vecteurs propres de A

Alors Q est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

Si on considère l'application g dont A est la matrice dans la base $\mathcal{C}$,

Alors B est la matrice de g dans la base $\mathcal{C}'$, et, d'après le théorème de changement de base,

$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}\text{Mat}_{\mathcal{C}'}(g)P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}$

ie $A = QBQ^{-1}$

9. En déduire, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n.

Calcul de Q^{-1} par la méthode du pivot de Gauss

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftrightarrow L_2$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$	$L_2 \leftarrow (1/3)L_2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

Conclusion:

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

<u>Calcul de A^n</u>

$A = QBQ^{-1}$

donc $A^n = QB^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

donc $A^n = \begin{pmatrix} -2(-1)^n & 2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

donc $A^n = (1/3) \begin{pmatrix} -2(-1)^n & 2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $A^n = (1/3) \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$

10. En déduire, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de N^n.

<u>Détermination de a_n et b_n</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$,

D'après la question 7.

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = (1/3) \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) \end{pmatrix}$

<u>Application au calcul de N^n</u>

D'après la question 7.,

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$N^n = P(a_n, b_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n) \end{pmatrix}$$

$$N^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

Partie B — Inversibilité des matrices de F

1. Soient b un réel et (x, y) un couple de réels. Montrer que

$$P(1, b)P(x, y) = P(x + 2by, bx + y + by) = P(x, y)P(1, b)$$

Soient b un réel et (x, y) un couple de réels.

$$P(1,b)P(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2by & bx+y+by & bx+y+by \\ bx+y+by & x+2by & bx+y+by \\ bx+y+by & bx+y+by & x+2by \end{pmatrix}$$

Par ailleurs,

$$P(x,y)P(1,b) = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2by & bx+y+by & bx+y+by \\ bx+y+by & x+2by & bx+y+by \\ bx+y+by & bx+y+by & x+2by \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion:</u>

$$\boxed{\forall b \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, P(1,b)P(x,y) = P(x+2by, bx+y+by) = P(x,y)P(1,b).}$$

On dit qu'une matrice $M \in$ admet une inverse dans F si M est inversible et $M^{-1} \in F$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout réel b, la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si le système

$$\begin{cases} x & = & 1 - 2by \\ (1 + b - 2b^2)y & = & -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y).

Soit $b \in \mathbb{R}$,

la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F

ssi il existe une matrice M dans F telle que $P(1, b)M = MP(1, b) = I_3$

ssi il existe $(x, y) \in \mathbb{R}$ tel que $P(1, b)P(x, y) = P(x, y)P(1, b) = I_3$

ssi il existe $(x, y) \in \mathbb{R}$ tel que $P(x + 2by, bx + y + by) = I_3$

ssi il existe $(x, y) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x + 2by & = & 1 \\ bx + by + y & = & 0 \end{cases}$$

ssi il existe $(x, y) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x & = & 1 - 2by \\ b(1 - 2by) + by + y & = & 0 \end{cases}$$

ssi il existe $(x, y) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x & = & 1 - 2by \\ b + (1 + b - 2b^2) & = & 0 \end{cases}$$

si et seulement si le système

$$\begin{cases} x & = & 1 - 2by \\ (1 + b - 2b^2)y & = & -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y).

3. Montrer que la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$.

   Résolution de $1 + b - 2b^2 = 0$

   Posons $\alpha = -2$, $\beta = 1$ et $gamma = 1$

   $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 * (-2)(1) = 9 = 3^2$

   Les solutions de l'équation sont $b_1 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{-4} = 1$ et $b_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{-4} = -1/2$.

   Retour au système de la question précédente

   Si $b \in \{1; -1/2\}$, alors le système

$$\begin{cases} x & = & 1 - 2by \\ (1 + b - 2b^2)y & = & -b \end{cases}$$

   devient

$$\begin{cases} x & = & 1 - 2by \\ 0 & = & -b \end{cases}$$

   avec $b \neq 0$ et n'a donc pas de solution.

   Si $b \notin \{1; -1/2\}$, alors le système

$$\begin{cases} x &= 1-2by \\ (1+b-2b^2)y &= -b \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} x &= 1-2b\frac{-b}{1+b-2b^2} \\ y &= \frac{-b}{1+b-2b^2} \end{cases}$$

et admet donc une solution.

<u>Conclusion</u>

le système

$$\begin{cases} x &= 1-2by \\ (1+b-2b^2)y &= -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y) si et seulement si $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$.

Donc

$\boxed{\text{la matrice } P(1, b) \text{ admet donc un inverse dans } F}$

$\boxed{\text{si et seulement si } b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}.}$

4. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(1, b)$ est inversible ?

   Nous venons de voir que si $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$, $P(1, b)$ admet un inverse dans F et est donc inversible.

   Si $b = 1$,

   $P(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et n'est donc pas inversible.

   Si $b = -1/2$,

   $$P(1,-1/2) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$\text{Det}P(1,-1/2) = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

   $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

   $$\text{Det}P(1,-1/2) = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donc $P(1,-1/2)$ n'est pas inversible.

<u>Conclusion :</u>

$\boxed{\text{Donc la matrice } P(1,b) \text{ est inversible si et seulement si } b \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1/2\}.}$

5. Soit a un réel ***non nul***. Justifier que pour tout réel b, on a $P(a,b) = aP(1,b/a)$ et en déduire les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(a,b)$ est inversible.

   Soit a un réel ***non nul***. Justifier que pour tout réel b, on a $P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \times \frac{b}{a} & a \times \frac{b}{a} \\ a \times \frac{b}{a} & a & a \times \frac{b}{a} \\ a \times \frac{b}{a} & a \times \frac{b}{a} & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix} = aP\left(1, \frac{b}{a}\right)$

   On en déduit que la matrice $P(a,b)$ est inversible ssi $\frac{b}{a} \in \mathbb{R} \setminus \{1;-1/2\}$

   $\boxed{\text{ssi } b \in \mathbb{R} \setminus \{a; -a/2\}}$

6. Donner les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(0,b)$ est inversible. *Indication: on pourra utiliser le fait, prouvé en partie A, que la matrice N est inversible.*

   Si $b=0$, $P(0,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

   Si $b \neq 0$, $P(0,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix} = bN$, or N est inversible, donc $P(0,b)$ est inversible et

   $P(0,b)^{-1} = \frac{1}{b}N^{-1}$

   Conclusion:

   $\boxed{P(0,b) \text{ est inversible ssi } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

7. Conclure en donnant l'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles.

   L'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles est l'ensemble des matrices $P(a,b)$ telles que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{a; -\frac{a}{2}\}$.

   ie $\boxed{\text{l'ensemble des matrices } P(a,a) \text{ telles que } a \in \mathbb{R} \text{ et } P(a,-\tfrac{a}{2}) \text{ telles que } a \in \mathbb{R}.}$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\cos x| - |\sin x|$.

1. (a) Montrer que f est périodique de période π.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $f(x+\pi) = |\cos(x+\pi)| - |\sin(x+\pi)| = |-\cos x| - |-\sin x|$
   Donc $f(x+\pi) = |\cos x| - |\sin x| = f(x)$
   Donc $\boxed{f \text{ est périodique de période } \pi.}$

   (b) Donner la parité de f.
   $D_f = \mathbb{R}$ est centrée en 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f(-x) = |\cos(-x)| - |\sin(-x)| = |\cos x| - |-\sin x|$
   donc $f(-x) = |\cos x| - |\sin x| = f(x)$
   et $\boxed{f \text{ est une fonction paire.}}$

2. Trouver la plus grande valeur de $a > 0$ pour laquelle l'égalité $f(x) = \cos x - \sin x$ est valable pour tout $x \in [0, a]$.

   Pour $a = \frac{\pi}{2}$,

   Sur $[0; a] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

   $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$, donc

   $f(x) = |\cos x| - |\sin x| = \cos x - \sin x$

   Sur $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$,

   $\cos x \leq 0$ et $\sin x \geq 0$,

   donc $f(x) = |\cos x| - |\sin x| = -\cos x - \sin x \neq \cos x - \sin x$

   Donc la réponse est $\boxed{a = \frac{\pi}{2}.}$

3. Calculer une constante C telle que

$$\cos(x) - \sin(x) = C\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

   pour tout réel x. On utilisera cette écriture dans la suite.

   <u>Méthode 1 :</u>

   Admettons qu'il existe C tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) - \sin(x) = C\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

   Posons $x = 0$ et identifions:

   $\cos(0) - \sin(0) = C\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right)$

   ie

   $1 - 0 = C\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ie $1 = C\frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\boxed{C = \sqrt{2}}$

<u>Méthode 2 :</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$\cos(x) - \sin(x) = \mathcal{R}e\left((1+i)(\cos x + i \sin x)\right) = \mathcal{R}e\left((\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(e^{ix})\right)$

$= \mathcal{R}e\left(\sqrt{2}e^{i(x+\frac{\pi}{4})}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d'où $\boxed{C = \sqrt{2}}$.

4. En déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

   <u>Méthode :</u>

   On trace la courbe de $x \longmapsto \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ en utilisant les données ci dessous.

   $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

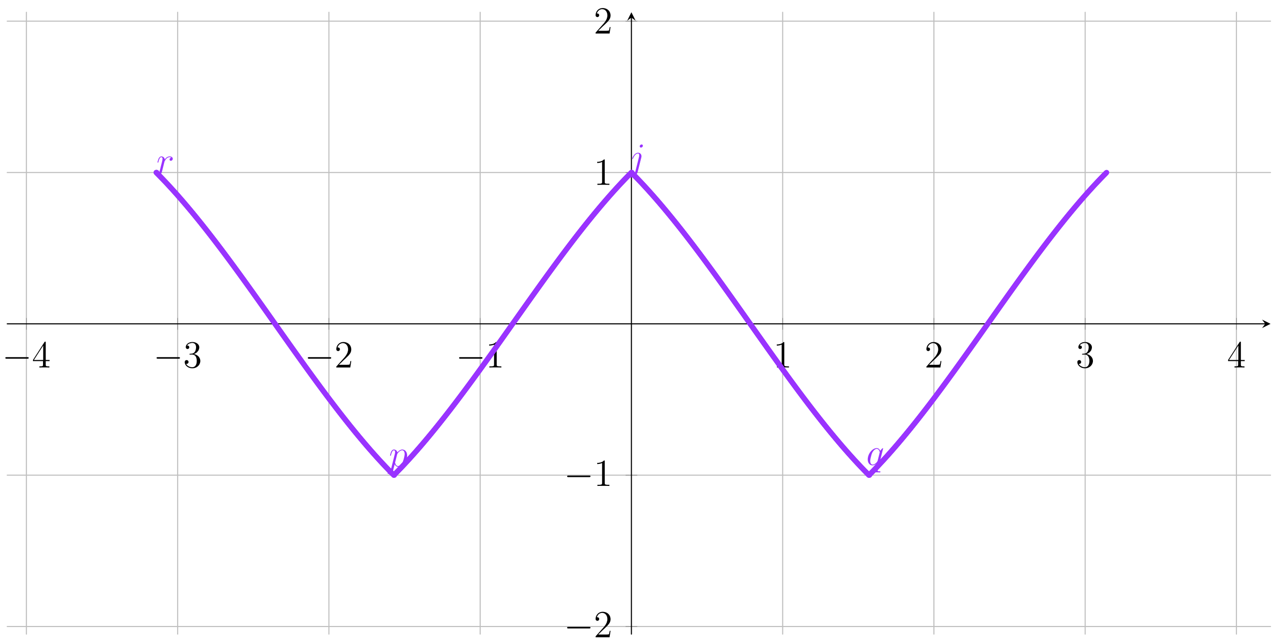
   donc $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) < 0$

   De plus, $f(0) = 1 \quad f'(0) = -1$

   et $f((\frac{\pi}{2}) = -1 \quad f'((\frac{\pi}{2}) = -1$

   Puis on trace la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie de la partie de courbe déjà tracée par rapport à l'axe des ordonnées en utilisant la parité de f.

   Enfin on termine la courbe en recopiant le motif déjà tracé en utilisant la $\pi-$périodicité de f.



5. (a) Montrer que la série de Fourier Sf de la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx)$$

f est une fonction $\pi-$périodique, on appelle série de Fourier Sf de la fonction f la série définie par

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx)$$

où $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(2nt)dt$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = 0.}$

(b) Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

D'après le théorème de Dirichlet,

Si f est une fonction T-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

- la série de Fourier de f converge en tout point
  et
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme est

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left(f(x+h) + f(x-h)\right)$$

Or la fonction f est ici $\pi-$périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier converge en tout point de $\mathbb{R}$.

De plus elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Sf(x) = f(x)$$

6. (a) Donner, pour tout entier $n > 1$, une expression de a_n en fonction de n, en détaillant les calculs. *Indication : on pourra utiliser le fait que pour tous réels a et b, on a*

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

Soit $n > 1$,

$a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(2nt)dt$

Or f est paire, donc

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(2nt)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cos(2nt)dt$$
$$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[\cos\left(t+\frac{\pi}{4}+2nt\right)+\cos\left(t+\frac{\pi}{4}-2nt\right)\right]dt$$
$$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(t+\frac{\pi}{4}+2nt\right)+\cos\left(t+\frac{\pi}{4}-2nt\right)\right]dt$$
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left((2n+1)t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left((-2n+1)t+\frac{\pi}{4}\right)\right]dt$$
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)t+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{-2n+1}\sin\left((-2n+1)t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{-2n+1}\sin\left((-2n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left(0+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{-2n+1}\sin\left(0+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right]$$
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{1}{-2n+1}\sin\left(-n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{-2n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right]$$
Or $\forall n>1$, $\sin\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(-n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$

donc
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{-2n+1}\right]\sin\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{-2n+1}\right]\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right.$$
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{-2n+1}\right)\left(\sin\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{-2n+1+2n+1}{(2n+1)(-2n+1)}\right)\left(\sin\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\boxed{a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{1-4n^2}\right)\left(\sin\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

(b) Montrer que pour tout entier naturel pair n, on a $a_n = 0$.
Soit n un entier naturel pair,
alors il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p$ et
$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{1-4n^2}\right)\left(\sin\left(2p\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
donc $a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{1-4n^2}\right)\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ie

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{1-4n^2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Conclusion:

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel pair } n, \text{ on a } a_n = 0.}$

(c) Montrer que pour tout entier naturel p, on a $a_{2p+1} = \dfrac{8}{\pi\left(4(2p+1)^2 - 1\right)}$.

Soit p un entier naturel pair,

alors

$$a_{2p+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{1-4(2p+1)^2}\right)\left(\sin\left(2(2p+1)\pi + \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

donc $a_{2p+1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\dfrac{2}{1-4(2p+1)^2}\right)\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ie

$$a_{2p+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{1-4(2p+1)^2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

donc

$$a_{2p+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{1-4(2p+1)^2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)$$

donc

$$a_{2p+1} = \frac{2\sqrt{2}\times 2\times\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{-1}{1-4(2p+1)^2}\right)$$

Conclusion:

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel pair } p, \text{ on a } a_{2p+1} = \dfrac{8}{\pi(4(2p+1)^2-1)}.}$

7. En exprimant de deux manières $f(0)$, calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4(2p+1)^2 - 1}$.

Tout d'abord,

$f(0) = |\cos 0| - |\sin 0| = |1| - |0| = 1$

Par ailleurs, d'après la question 5.(b),pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$

donc

$$f(0) = Sf(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2n\times 0) + b_n \sin(2n \times 0)$$

d'où

$$1 = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}\cos(0) + 0 \times \sin(2(2p+1)\times 0)$$

donc

$$1 = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(4(2p+1)^2-1)} \times 1 + 0$$

donc

$$\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4(2p+1)^2-1)} = 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4(2p+1)^2-1)} = \frac{\pi}{8}}$$

8. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

   Théorème de Parseval

   Si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et

   $$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4(2p+1)^2-1)^2}$.

   Ici f est une fonction π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et

   $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

   De plus f est paire, donc

   $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t)^2 \mathrm{d}t = 0^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}(a_{2p+1})^2$$

   ie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 2\cos t\sin t + \sin^2 t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi(4(2p+1)^2-1)}\right)^2$$

d'où

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos t\sin t)\mathrm{d}t = \frac{64}{2\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(4(2p+1)^2-1)}\right)^2$$

d'où

$$\frac{2}{\pi}\left[t+(\cos t)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(4(2p+1)^2-1)}\right)^2$$

d'où

$$\frac{\pi}{16}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)-(1)\right] = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(4(2p+1)^2-1)}\right)^2$$

Conclusion

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(4(2p+1)^2-1)^2} = \frac{\pi}{16}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}$$

Exercice 3

Soit ω un paramètre réel positif. On considère l'équation différentielle suivante

$$xy''(x)+y'(x)+\omega^2xy(x)=0, \qquad (H_\omega)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. ***Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.***

Partie A — Étude du cas $\omega = 0$

1. Montrer que si y est une solution de (H_0) sur $]0,\infty[$, alors $z = y'$ est solution de l'équation différentielle

$$z'(x)+\frac{z(x)}{x}=0 \qquad (E)$$

sur $]0,\infty[$.

Considérons l'équation homogène (H_0)

$$xy''(x) + y'(x) + 0 = 0, \tag{H_0}$$

et posons $z = y'$.
Alors y est solution de (H_0) sur $]0,\infty[$ ssi z est solution de

$$xz'(x) + z(x) + 0 = 0,$$

ssi
z est solution de

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = 0, \tag{E}$$

2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0,\infty[$.

   Résolvons
   $$z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = 0, \tag{E}$$
   Une primitive de $a : x \mapsto \frac{1}{x}z(x)$ sur $]0,+\infty[$ est $A : x \mapsto \ln(x)$
   et
   la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$ est définie par
   $z(x) = Ce^{-\ln x} = C\frac{1}{x}$

   $$\boxed{z(x) = C\frac{1}{x} \qquad \text{où } C \text{ est une constante réelle}}$$

   (b) En déduire les solutions de (H_0) sur $]0,\infty[$.

   y est solution de (H_0) sur $]0,+\infty[$
   ssi $z = y'$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$
   ssi $y' = C\frac{1}{x}$ où C est une constante réelle
   ssi $y = C\ln x + D$ où C et D sont des constantes réelles
   $\boxed{\text{La solution générale de } (H_0) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est } y(x) = C\ln x + D}$
   où C et D sont des constantes réelles.

3. Résoudre l'équation différentielle (H_0) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

   En suivant le même raisonnement, on peut démontrer que
   $\boxed{\text{La solution générale de } (H_0) \text{ sur }]-\infty; 0[\text{ est } y(x) = C\ln(-x) + D}$
   où C et D sont des constantes réelles.

4. Quelles sont les solutions de (H_0) sur $\mathbb{R}$?

   y est solution de (H_0) sur $\mathbb{R}$

   ssi

   y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et il existe A, B, C, D et E tels que
   $$y(x) = \begin{cases} A\ln(-x) + B & \text{si} \quad x < 0 \\ C & \text{si} \quad x = 0 \\ D\ln(x) + E & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
   or, étant donnée la limite de la fonction logarithme népérien en 0, une telle fonction est continue sur $\mathbb{R}$

   ssi

   $A = D = 0$ et $B = C = E$.

   et est donc constante sur $\mathbb{R}$.

   Une telle fonction sera alors 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Conclusion :

   $\boxed{\text{Les solutions de } (H_0) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions constantes.}}$

Partie B — Étude du cas $\omega > 0$

Dans toute cette partie, on suppose $\omega > 0$.

1. Montrer qu'une solution y de (H_ω) définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $y'(0) = 0$.

   En remplaçant x par 0 dans l'équation (H_ω), on obtient
   $$0 \times y''(0) + y'(0) + \omega^2 \times 0 \times y(0) = 0,$$
   donc, si y vérifie l'équation (H_ω), alors
   $\boxed{y'(0) = 0}$

On cherche à présent les séries entières $y(x) = \sum a_n x^n$ solutions de (H_ω) sur l'intervalle $]-R, R[$, où $R > 0$ désigne le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

2. Que vaut a_1 ?

   Si on considère une solution y de l'équation (H_ω) développable en série entière et définie sur $]-R, R[$ par

   $$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   Alors

   $\boxed{a_1 = y'(0) = 0}$

3. (a) Montrer que la suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+2)^2}.$$

   Si on considère une solution y de l'équation (H_ω) développable en série entière et définie sur $]-R, R[$ par

   $$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   Alors
   $\forall x \in]-R, R[,$

   $$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

   et

   $$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

   or
   $\forall x \in]-R, R[, \quad xy''(x) + y'(x) + \omega^2 x y(x) = 0$
   donc

$\forall x \in]-R, R[$,

$$x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \omega^2 x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Procédons au changement de variable

$n' = n+2$ dans la $3^{\text{ème}}$ somme,

alors $n'-1 = n+1$ et $n'-2 = n$

d'où

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \omega^2 \sum_{n'=2}^{+\infty} a_{n'-2} x^{n'-1} = 0$$

d'où (rappelons que l'indice de sommation est une variable muette)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \omega^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0$$

puis

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 1 \times a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \omega^2 a_{n-2} x^{n-1} = 0$$

donc $\forall x \in]-R, R[$,

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} [n(n-1)a_n + n a_n + \omega^2 a_{n-2}] x^{n-1} = 0$$

donc $\forall x \in]-R, R[$,

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n(n-1)+n)a_n + \omega^2 a_{n-2}] x^{n-1} = 0$$

donc $\forall x \in]-R, R[$,

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n^2-n+n)a_n + \omega^2 a_{n-2}] x^{n-1} = 0$$

donc $\forall x \in]-R, R[$,

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n^2)a_n + \omega^2 a_{n-2}] x^{n-1} = 0$$

par identification des coefficients des séries entières,

$a_1 = 0$ (déjà démontré)

et

$\forall n \geq 2, \quad (n^2)a_n + \omega^2 a_{n-2} = 0$

ie

$\forall n \geq 2, \quad a_n + \frac{\omega^2}{n^2} a_{n-2} = 0$

$\forall n \geq 2, \quad a_n = -\frac{\omega^2}{n^2} a_{n-2}$

(par changement d'indice, $n' = n + 2$)

$\forall n' \geq 0, \quad a_{n'+2} = -\frac{\omega^2}{(n'+2)^2} a_{n'}$

Conclusion :

$\boxed{\forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)^2} a_n}$

(b) En déduire la valeur de a_{2n+1} , pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons vu en B.2., que $a_1 = 0$

or,

$\forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)^2} a_n$

donc

$\forall k \geq 0, \quad a_{2k+3} = -\frac{\omega^2}{(2k+3)^2} a_{2k+1}$

donc, une simple récurrence permet de conclure que

$\forall k \geq 1, \quad a_{2k+1} = 0$

Conclusion :

$\boxed{\forall n \geq 0, \quad a_{2n+1} = 0}$

(c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0.$$

Initialisation

Pour $n = 0$,

$\frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0 = \frac{(-1)^0 \omega^{2\times 0}}{2^{2\times 0}(0!)^2} a_0 = \frac{1\omega^0}{2^0 1^2} a_0 = 1 \times a_0 = a_0$

Donc l'égalité est vérifiée au rang $n = 0$.

Hérédité

Soit $n \geq 0$,

supposons que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0.$$

On sait que

$$\forall k \geq 0, \quad a_{2k+2} = -\frac{\omega^2}{(2k+2)^2} a_{2k}$$

donc

$$a_{2n+2} = -\frac{\omega^2}{(2n+2)^2} \times \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0$$

donc

$$a_{2n+2} = \frac{(-1) \times (-1)^n \times \omega^2 \times \omega^{2n}}{(2(n+1))^2 \times 2^{2n}(n!)^2} a_0$$

donc

$$a_{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} \times \omega^{2n+4}}{2^2 \times (n+1) \times (n+1) \times 2^{2n} \times n! \times n!} a_0$$

$$a_{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} \times \omega^{2(n+2)}}{2^{2n+2} \times n! \times (n+1) \times n! \times (n+1)} a_0$$

$$a_{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} \times \omega^{2(n+2)}}{2^{2n+2} \times (n+1)! \times (n+1)!} a_0$$

Conclusion

Par principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0.}$$

4. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} a_{2n} x^{2n} = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$a_{2n} x^{2n} = \dfrac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0 \times x^{2n}.$

donc

$$\left|a_{2n}x^{2n}\right| = \left(\frac{\omega x}{2}\right)^{2n} \times \frac{1}{(n!)^2}a_0 = \left(\frac{\left(\frac{\omega x}{2}\right)^n}{n!}\right)^2 a_0.$$
or
$\forall q \in \mathbb{R}, q^n = \mathrm{o}_{+\infty}(n!)$
donc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\omega x}{2}\right)^n}{n!} = 0$$
donc
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{\omega x}{2}\right)^n}{n!}\right)^2 a_0 = 0$$
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}x^{2n} = 0}$

(b) En déduire le rayon de convergence R de la série $y(x) = \sum a_n x^n$.

Méthode 1

Considérons $r \in \mathbb{R}_+^*$, et la série numérique

$$\sum a_n r^n \quad ie \sum a_{2n} r^{2n}$$

D'après la question précédente,
Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}r^{2n} = 0$,
donc la suite $\left(a_{2n}r^{2n}\right)$ est bornée
donc $\mathrm{Sup}\{r \in \mathbb{R}_+^*, \left(a_{2n}r^{2n}\right) \text{estbornee}\} = +\infty$
Conclusion:

$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } y(x) = \sum a_n x^n \text{ est } +\infty}$

$\boxed{\text{et } y \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

Méthode 2 (ne tient pas compte de "en déduire", donc ne répond pas tout à fait à la question)
Considérons $r \in \mathbb{R}_+^*$, et la série numérique

$$\sum a_n r^n \quad ie \sum a_{2n} r^{2n} \quad ie \sum \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0 \times r^{2n}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = \dfrac{\omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0 \times r^{2n}$
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n > 0$
et
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{\omega^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} a_0 \times r^{2(n+1)}}{\dfrac{\omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0 \times r^{2n}}$
$= \dfrac{\omega^{2n+2}}{\omega^{2n}} \times \dfrac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \times \dfrac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \times \dfrac{a_0}{a_0} \times \dfrac{r^{2n+2}}{r^{2n}} = \omega^2 \times \dfrac{1}{4} \times r^2 \times \dfrac{1}{(n+1)^2}$
or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$
Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
Donc, d'après le critère de d'Alembert,
la série $\sum u_n$ est convergente.
Donc la série $\sum \dfrac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} a_0 \times r^{2n}$ est absolument convergente
et donc convergente.
Conclusion:
$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } y(x) = \sum a_n x^n \text{ est } +\infty}$
$\boxed{\text{et } y \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

Partie C — Calcul approché

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Pour tout réel a, l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p - 1 < a \leq p$ est appelé la ***partie entière supérieure*** de a, et on le note $\lceil a \rceil$. De manière équivalente, $\lceil a \rceil$ est le plus petit entier qui soit supérieur ou égal à a.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On note $n_x = \lceil |x| - 1 \rceil$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=n_x}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2}$ vérifie la règle spéciale des séries alternées.

   Considérons $x \in \mathbb{R}^*$.
   Pour $n \geq n_x$, posons $u_n = \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2} = \left(\dfrac{x^n}{n!}\right)^2$
   Alors la suite (u_n) vérifie :

   (a) $\forall n \geq n_x$, $u_n > 0$,

   (b) $\forall n \geq n_x$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\left(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)^2}{\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)^2} = \left(\dfrac{x^{n+1}}{x^n} \times \dfrac{n!}{(n+1)!}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^2$,
   or $n \geq n_x$, donc $n+1 \geq |x|$ et $\frac{|x|}{n+1} \leq 1$ donc $\left(\frac{x}{n+1}\right)^2 \leq 1$
   ainsi $\forall n \geq n_x$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$
   et la suite (u_n) est décroissante.

   (c) Enfin
   $x^n = \mathrm{o}(n!)$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = 0$
   donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

   Ainsi la suite (u_n) vérifie la règle spéciale des séries alternées.

   Remarque :
   On peut en déduire que la série converge, mais ce n'est pas demandé dans la question.

   Dans la suite, on admet que le résultat de la question précédente implique que

$$\left| f(x) - \sum_{n=n_x}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2} \right| \leq \frac{x^{2(N+1)}}{(N+1)!^2}$$

   pour tout entier $N \geq n_x$.

2. La fonction `fapprox` ci-dessous prend en entrée un réel x non nul, un réel strictement positif ε, et renvoie une approximation de $f(x)$ à ε près, c'est-à-dire un réel y tel que $|f(x) - y| \leq \varepsilon$.

Recopier la fonction `fapprox` (en version *Scilab* ou bien pseudo-code) et la compléter.

Note : les fonctions ≪ valeur absolue ≫ et ≪ partie entière supérieure ≫ s'écrivent respectivement ***`abs`*** *et* ***`ceil`*** *en Scilab.*

```
function y=fapprox(x, eps)
  nx = ceil(abs(x) - 1)
  y = 0
  t =...
  n =...
  while ... |...
    y = y+t
    n = n+1
    t = -t * x^2/n^2
  end
endfunction
```

fonction FAPPROX(x, ε)

$n_x \leftarrow \lceil |x| - 1 \rceil$

$y \leftarrow 0$

$t \leftarrow \cdots$

$n \leftarrow \cdots$

tant que $\cdots$ **ou** $\cdots$

$y \leftarrow y + t$

$n \leftarrow n + 1$

$t \leftarrow -tx^2/n^2$

fin tant que

renvoyer y

fin fonction

Version complétée :

```
function y=fapprox(x, eps)
  nx = ceil(abs(x) - 1)
  y = 0
  t =(-1)^(nx)*x^(2*nx)/(nx^2)
  n =nx
  while abs(t)>eps |y=0
    y = y+t
    n = n+1
    t = -t * x^2/n^2
  end
endfunction
```

fonction FAPPROX(x, ε)

$n_x \leftarrow \lceil |x| - 1 \rceil$

$y \leftarrow 0$

$t \leftarrow (-1)^(nx) * x^(2 * nx)/(nx^2)$

$n \leftarrow nx$

tant que $abs(t) > eps$ **ou** $y = 0$

$y \leftarrow y + t$

$n \leftarrow n + 1$

$t \leftarrow -tx^2/n^2$

fin tant que

renvoyer y

fin fonction

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = 2z - z^2$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A — Construction géométrique

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = 1$, tel que $z \neq 1$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1 = z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2 = 2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

1. Montrer que le quadrilatère OM_1M_2N est un parallélogramme.

   $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{M_1} - z_O = z_1 - 0 = z^2$
   et
   $z_{\overrightarrow{NM_2}} = z_{M_2} - z_N = z_2 - f(z) = 2z - (2z - z^2) = z^2 = z_{\overrightarrow{OM_1}}$
   donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{NM_2}$
   et
   $\boxed{\text{le quadrilatère } OM_1M_2N \text{ est un parallélogramme.}}$

2. Donner le module de z_1 et exprimer l'argument de z_1 en fonction de celui de z.

   module de z_1
   $|z_1| = |z^2| = (|z|)^2 = (1)^2 = \boxed{1}$
   Argument de z_1
   $\mathrm{Arg}(z_1) \equiv \mathrm{Arg}(z^2)[2\pi] \boxed{\equiv 2 \times \mathrm{Arg}(z)[2\pi].}$

3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N.

(a) On commence par construire M_1
$|z_1| = 1$ et $\text{Arg}(z_1) \equiv 2 \times \text{Arg}(z)[2\pi]$.
Donc M_1 est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

(b) puis on construit M_2
$z_2 = 2z$ donc M_2 est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2

(c) Enfin
$\boxed{\text{on construit } N \text{ comme quatrième sommet du parallélogramme } OM_1M_2N.}$

Partie B — Tracé d'une courbe paramétrée

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point d'affixe e^{it} et $N(t)$ le point d'affixe $f(e^{it})$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $N(t)$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$z_N = f(z) = 2z - z^2 = 2 * \mathrm{e}^{it} - \left(\mathrm{e}^{it}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{i2t}$
d'où
$x(t) + iy(t) = 2(\cos t + i\sin t) - (\cos(2t) + i\sin(2t))$
$= (2\cos t - \cos(2t)) + i\,(2\sin t - \sin(2t))$
Par identification des parties réelles et parties imaginaires

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

2. (a) Montrer que les fonctions x et y sont 2π−-périodiques.

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) - \cos 2(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) - \cos(2t+4\pi) \\ y(t+2\pi) = 2\sin(t+2\pi) - \sin 2(t+2\pi) = 2\sin(t+2\pi) - \sin(2t+4\pi) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = 2\cos t - \cos 2t = x(t) \\ y(t+2\pi) = 2\sin t - \sin 2t = y(t) \end{cases}$$

Conclusion :

$\boxed{\text{Les fonctions } x \text{ et } y \text{ sont } 2\pi\text{−-périodiques.}}$

(b) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, montrer que le point $N(-t)$ se déduit du point $N(t)$ par une symétrie que l'on précisera.

pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(-t) = 2\cos(-t) - \cos 2(-t) = 2\cos(-t) - \cos(-2t) \\ y(-t) = 2\sin(-t) - \sin 2(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x(-t) = 2\cos t - \cos 2t = x(t) \\ y(-t) = -2\sin t - (-\sin 2t) = -(2\sin t - \sin 2t) = -y(t) \end{cases}$$

Conclusion :

$\boxed{\text{Le point } N(-t) \text{ se déduit du point } N(t) \text{ par la symétrie d'axe l'axe des abscis}}$

(c) Déduire des questions 2(a) et 2(b) un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe paramétrée.

Nous allons étudier la courbe paramétrée sur l'intervalle $I = [0; \pi]$. Nous obtiendrons ensuite la courbe paramétrée sur l'intervalle $I = [-\pi; \pi]$ par symétrie d'axe l'axe des abscisses (voir question 2(b)) et nous aurons ainsi la totalité de la courbe paramétrée sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par périodicité de x et y (voir question 2.(a)).

3. (a) Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$, puis étudier leur signe. *On rappelle les formules trigonométriques suivantes*

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Dérivabilité de x et y

x et y sont des sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$

Formules utilisées : $(2u)' = 2u'$, $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = 2(-\sin t) - (-2\sin 2t) = 2(\sin(-t) - \sin(-2t)) \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 2(\cos t - \cos 2t) \end{cases}$$

ie

$$\begin{cases} x'(t) = 2\left(2\cos\dfrac{(-t)+(-2t)}{2}\sin\dfrac{(-t)-(-2t)}{2}\right) = 4\cos\dfrac{-3t}{2}\sin\dfrac{t}{2} \\ y'(t) = 2\left(-2\sin\dfrac{t+(-2t)}{2}\sin\dfrac{t-(-2t)}{2}\right) = -4\sin\dfrac{-t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = 4\cos\dfrac{3t}{2}\sin\dfrac{t}{2} \\ y'(t) = 4\sin\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \end{cases}}$$

Signe de $x'(t)$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{3t}{2}$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\cos\frac{3t}{2}$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\frac{t}{2}$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{t}{2}$	0	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1
signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0

Signe de $y'(t)$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{t}{2}$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{t}{2}$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	1
$\frac{3t}{2}$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\frac{3t}{2}$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1
signe de $y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4

(b) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$.

Nous obtenons le tableau de variation:

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
variations de x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
signe de $y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
variations de y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4. Montrer que pour tout réel $t \in]0, \pi]$, le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $N(t)$.

   Soit $t \in]0, \pi]$,

   $\overrightarrow{M(t)N(t)} \begin{pmatrix} (2\cos t - \cos 2t) - (\cos t) \\ (2\sin t - \sin 2t) - (\sin t) \end{pmatrix}$

   ie

   $\overrightarrow{M(t)N(t)} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 2t \\ \sin t - \sin 2t \end{pmatrix}$

   Or la tangente à la courbe paramétrée en $N(t)$ a pour vecteur directeur

   $\vec{v} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

   ie

   $\vec{v} \begin{pmatrix} 2(-\sin t) - (-2\sin 2t) \\ 2\cos t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$

   ie

   $\vec{v} \begin{pmatrix} 2(-\sin t + \sin 2t) \\ 2(\cos t - \cos 2t) \end{pmatrix}$

   Donc le produit scalaire

   $\overrightarrow{M(t)N(t)}.\vec{v} = (\cos t - \cos 2t) \times 2(-\sin t + \sin 2t) + (\sin t - \sin 2t) \times 2(\cos t - \cos 2t) = -2(\cos t - \cos 2t)(\sin t - \sin 2t) + 2(\cos t - \cos 2t)(\sin t - \sin 2t) = 0$

   Donc

   $\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{M(t)N(t)} \text{ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en } N(t)}$

5. Tracer la courbe paramétrée. On fera apparaître en particulier les points $N(t)$ pour $t \in \{\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.

   Détail des points et tangentes

   $\boxed{t = 0}$

   $x'(0) = y'(0) = 0$ Donc N_0 est un point singulier

   $\forall t \in \mathbb{R}$

   $$\begin{cases} x''(t) = -2\cos t - (-2)(2)\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t - 2(-2)\sin 2t \end{cases}$$

   donc

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x''(0) = -2\cos 0 - (-2)(2)\cos 0 = 2 \\ y''(t) = -2\sin t - 2(-2)\sin 2t = 0 \end{cases}$$

Donc la courbe a pour vecteur tangent $v_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $N_0(1, 0)$.

$\boxed{t = \frac{\pi}{3}}$

$x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ Donc $N_{\frac{\pi}{3}}$ est un point régulier

et la courbe a pour vecteur tangent $v_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $N_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\boxed{t = \frac{2\pi}{3}}$

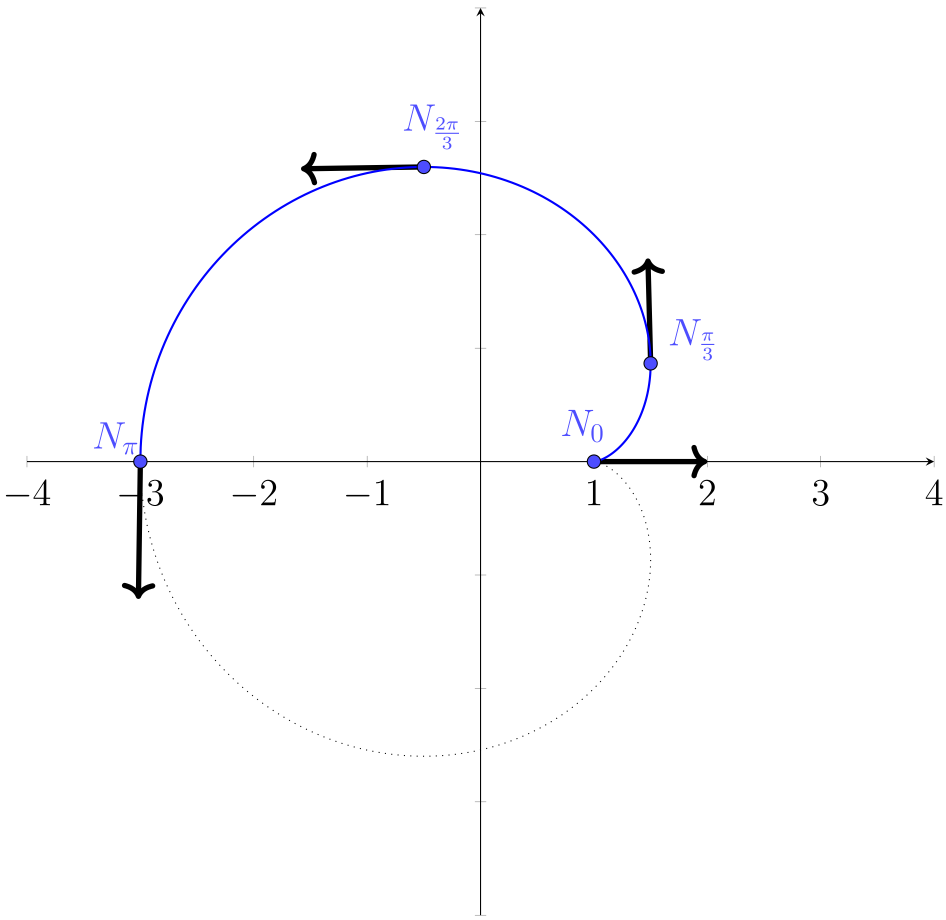
$x'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2$ et $y'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$ Donc $N_{\dfrac{2\pi}{3}}$ est un point régulier

et la courbe a pour vecteur tangent $v_{\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $N_{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\boxed{t = \pi}$

$x'(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = -4$ Donc N_π est un point régulier

et la courbe a pour vecteur tangent $v_{(\pi)} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $N_\pi\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



6. Calculer la longueur de la courbe paramétrée, donnée par la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \mathrm{d}t$$

Posons

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)^2 + \left(4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}\right)^2} \mathrm{d}t$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2 \left[\left(\cos\frac{3t}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{3t}{2}\right)^2\right]} \mathrm{d}t$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2} \times 1\mathrm{d}t$$

$$L = 4 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2} \mathrm{d}t$$

$$L = 4 \times 2 \times \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2} \mathrm{d}t$$

$$L = 8 \times \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$

$$L = 8 \times \left[-2 \cos \frac{t}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$L = -16 \times \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$L = -16 \times (0 - 1)$$

$L = 16$ unités de longueur