

**CONCOURS ATS
-SESSION 2022-**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE: 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE: 3H

Exercice 1

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels. On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Réduction

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A .
2. Justifier que A possède une unique valeur propre et donner son ordre de multiplicité.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

On considère dans la suite de cette partie l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

4. Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B} .
5. Calculer le rang de la matrice A . L'endomorphisme f est-il surjectif ?
6. L'endomorphisme f est-il injectif ? Est-il bijectif ?
7. On pose $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$. Montrer que la famille (e'_1, e'_2) forme une base de l'espace vectoriel $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.
8. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
(b) Calculer la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' .

Partie B Étude d'une suite de matrices

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = 2I - A$.
3. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

On définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un unique couple (α_n, β_n) de réels tel que

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$

et que ce couple vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} &= \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} &= \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$

5. Déterminer $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$, et β_3 ,
6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de α_n et β_n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, puis montrer cette conjecture. En déduire l'expression de X_n , en fonction de n .

Exercice 2

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi[$.

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

la série de Fourier de la fonction f .

2. (a) Calculer le coefficient a_0 .
- (b) Calculer les coefficients a_n , pour tout entier naturel non nul n .
- (c) Calculer les coefficients b_n , pour tout entier naturel non nul n .
- (d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.

3. En évaluant la série de Fourier de f en un point particulier, montrer que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

- (b) Donner la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

Exercice 3

On rappelle que la fonction tangente, notée \tan , réalise une bijection strictement croissante de $] -\pi/2, \pi/2[$ vers \mathbb{R} . Sa fonction réciproque, notée \arctan , est donc une bijection strictement croissante de \mathbb{R} vers $] -\pi/2, \pi/2[$. Elle est de plus impaire, dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante. La première question de la partie C nécessite le résultat de la question 2 de la partie B. Les questions 2 à 8 de la partie C peuvent être traitées de manière indépendante des parties A et B.

Partie A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \quad (E)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur \mathbb{R}_+^* . On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \quad (H)$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur \mathbb{R}_+^* .
2. Déterminer une fonction λ dérivable sur \mathbb{R}_+^* telle que la fonction $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ soit solution particulière de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R}_+^* .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R}_+^* .

Partie B Étude d'une fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

1. (a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
(b) En déduire le développement limité de \arctan au voisinage de 0 à l'ordre 3, puis celui de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.

Dans la suite on continuera à noter f la fonction ainsi prolongée de sorte que f est désormais définie sur \mathbb{R} .

3. Montrer que la fonction f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$ et la position du graphe de la fonction f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
4. Étudier les variations de la fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(x) = x - (1 + x^2) \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner le signe de $p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Démontrer que pour tout réel x de \mathbb{R}^* , on a $f'(x) = \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)}$ puis prouver que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f . On y fera apparaître ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Partie C Calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie on étudie l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt$$

dont on cherche à donner une approximation. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on définit

$$r_n = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

1. Pourquoi l'intégrale I est-elle bien définie ? *Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2 de la partie B.*
2. Établir pour tout réel $x \in [0, 1]$ la majoration

$$|r(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel t de $[0, 1]$, on a

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}.$$

En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x de $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$x s'_n(x) = \arctan(x) - r_n(x).$$

4. Écrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que

$$|s_n(1) - I| \leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

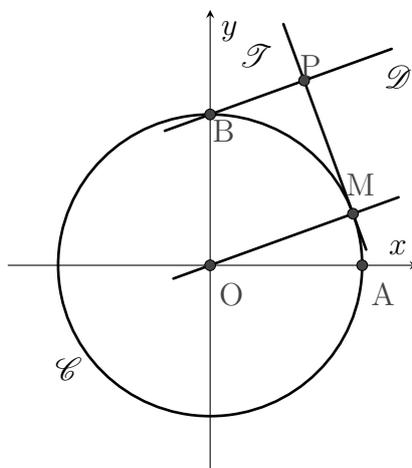
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(1)$.

5. Déterminer un entier naturel $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_N(1)$ soit une valeur approchée de I à 10^{-4} près.

6. Écrire une fonction nommée `s`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul n et renvoie le nombre $s_n(1)$.
7. Écrire une fonction nommée `trouve_N`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel strictement positif ε et renvoie le plus petit entier N tel que $\frac{1}{(2N+1)^2} \leq \varepsilon$.
8. En utilisant les fonctions `s` et `trouve_N`, écrire en *Scilab* ou bien en pseudo-code les instructions calculant et affichant une valeur approchée de l'intégrale I à 10^{-10} près.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1. Les points $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$ appartiennent au cercle \mathcal{C} . Soit θ un réel appartenant à $[0, 2\pi[$. On considère le point $M(\cos \theta, \sin \theta)$ de \mathcal{C} .

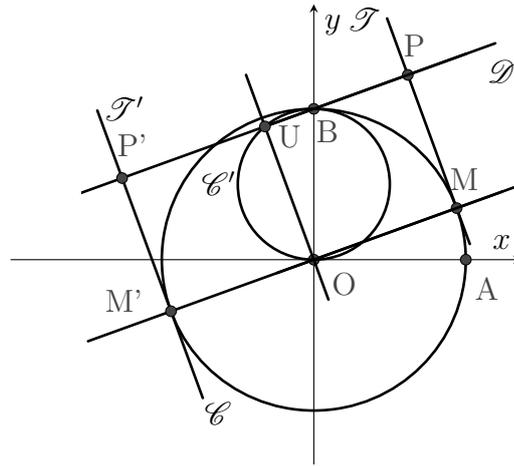


1. Donner une équation cartésienne de la tangente \mathcal{T} en M au cercle \mathcal{C} .
2. Donner une équation cartésienne de la droite \mathcal{D} passant par B et parallèle à (OM) .
3. Déterminer, en fonction du paramètre réel θ , tous les couples de réels (x, y) qui vérifient le système

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = \cos \theta \end{cases}$$

4. En déduire les coordonnées du point P , intersection de la droite \mathcal{T} et de la droite \mathcal{D} .

On appelle la courbe \mathcal{K} décrite par le point P lorsque θ parcourt $[0, 2\pi[$. Sur cette même figure, on ajoute le cercle \mathcal{C}' de diamètre $[OB]$, le point M' , autre intersection de la droite (OM) et du cercle \mathcal{C} , et la tangente \mathcal{T}' au cercle \mathcal{C} en M' . La droite (BP) coupe la tangente \mathcal{T}' en P' et le cercle \mathcal{C} en U (voir la figure ci-dessous).



5. Montrer que les droites \mathcal{T} , (OU) et \mathcal{T}' sont parallèles.
6. Montrer que $UP=UP'=1$.
7. Montrer le point P' appartient à la courbe \mathcal{K} . Si θ est le paramètre associé à P , quel est le paramètre correspondant pour P' ?
8. Dédire de ce qui précède une nouvelle construction des points de la courbe \mathcal{K} n'utilisant que le cercle \mathcal{C}' et le point B .