Mathématiques - Concours ATS 2022
Proposition de corrigé

Exercice 1 :
Partie A − Réduction

1. Le polynôme caractéristique est donné par $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ soit

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ -1+\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_1 + L_3 \\
&= (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(3-\lambda) + 4\right] \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda - 1)^2
\end{aligned}$$

soit $\boxed{P(\lambda) = (1-\lambda)^3}$

2. Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique donc $\boxed{A \text{ admet une unique valeur propre triple } \lambda = 1}$

3. La matrice A n'est pas diagonalisable car si elle l'était, elle serait semblable à la matrice identité I, c'est-à-dire égale à la matrice I, ce qui n'est pas le cas.

   Cependant, une alternative est de rechercher le sous-espace propre associé à cette valeur propre triple.

   $u = (x, y, z) \in E_1$ si et seulement si $f(u) = u$, ce qui se traduit en système $\begin{cases} 2x + 2y + z = x \\ -x - y - z = y \\ x + 2y + 2z = z \end{cases}$ soit $x + 2y + z = 0$: le sous-espace propre associé à la valeur propre triple $\lambda = 1$ est un plan, donc de dimension 2, par conséquent $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

   Le polynôme caractéristique étant scindé sur $\mathbb{R}[X]$, alors $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est trigonalisable}}$

4. Pour écrire la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique, il suffit d'écrire l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$. On obtient immédiatement $\boxed{\text{la matrice } A}$

5. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times (-1)^3 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

   Donc A est inversible, $\boxed{\text{ainsi } \operatorname{rg}(A) = 3}$

   Si on note $f : E \mapsto F$, $\boxed{\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \operatorname{rg}(f) \text{ donc } f \text{ est surjectif}}$

6. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim\ker(f) + \operatorname{rg}(f)$, sachant que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on a un noyau de dimension 0, soit $\ker(f) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

   Or une application linéaire est injective ssi le noyau est réduit au vecteur nul. Par conséquent, $\boxed{f \text{ est injectif}}$

   f étant injectif et surjectif, $\boxed{f \text{ est bijectif}}$

7. Les deux vecteurs e_1' et e_2' vérifient l'équation du plan sous-espace propre obtenue à la question 3. Ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires, par conséquent $\boxed{(e_1', e_2') \text{ forme une base de } F}$
8. (a) Calculons le déterminant de la famille (e_1', e_2', e_1). On a

$$\begin{aligned}
\det(e_1', e_2', e_1) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la dernière colonne} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Ce déterminant nest pas nul, donc $\boxed{\text{ces trois vecteurs forment une base de } \mathbb{R}^3}$

(b) Il nous faut limage de ces trois vecteurs $e_1',\ e_2',\ e_1$ dans la base (e_1', e_2', e_1).
On a déjà $f(e_1') = e_1'$ et $f(e_2') = e_2'$.
On a $f(e_1) = (2, -1, 1)$ dans la base canonique, soit également $f(e_1) = e_2' + e_1$.
donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Partie B –

1. Par calcul immédiat, on a

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

En calculant également la matrice $2A - I = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\boxed{A^2 = 2A - I}$

2. De la relation précédente, on en déduit que $A(2I - A) = I$; ce qui signifie que la matrice $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et son inverse est $\boxed{A^{-1} = 2I - A}$
3. $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$ équivaut à $(\alpha - \alpha')I = (\beta' - \beta)A$. Or deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, soit ici les 6 coefficients autres que la diagonale sont nuls, ce qui donne immédiatement $\beta = \beta'$.
De la relation $(\alpha - \alpha')I = (\beta' - \beta)A$, on en déduit également $\alpha = \alpha'$.
4. Il faut procéder par récurrence pour démonter la propriété : il existe un couple de réels (α_n, β_n) tel que $X_n = \alpha_n I + \beta_n A$.
— Pour $n = 0$, on a $X_0 = A$ donc $\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 1$ conviennent
— Comme A et I commutent, on a

$$\begin{aligned}
X_n^2 &= \alpha_n^2 I + 2\alpha_n\beta_n A + \beta_n^2 A^2 \\
&= \alpha_n^2 I + 2\alpha_n\beta_n A + \beta_n^2(2A - I) \\
&= (\alpha_n^2 - \beta_n^2)I + 2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)A
\end{aligned}$$

En remplaçant et simplifiant dans l'expression de X_{n+1}, on obtient
$X_{n+1} = \left(\dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2\right) I + \left(\dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1\right) = A$
En posant $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2$ et $\beta_{n+1} = \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1$, on obtient $X_{n+1} = \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} A$

— Conclusion : il existe bien un couple de réels (α_n, β_n) tel que $X_n = \alpha_n I + \beta_n A$.

Pour l'unicité, cela provient de la question 3 d'où

$\boxed{\text{il existe bien un unique couple de réels } (\alpha_n, \beta_n) \text{ tel que } X_n = \alpha_n I + \beta_n A}$ avec

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2,\ \beta_{n+1} = \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1}$$

5. On a $X_0 = A$ d'où par identification $\boxed{\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 1}$

   Avec les relations précédentes, on en déduit $\boxed{\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 1}$, $\boxed{\alpha_2 = 2,\ \beta_2 = 1}$ et $\boxed{\alpha_3 = 3,\ \beta_3 = 1}$

6. On conjecture que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = nI + A}$ que l'on va démontrer par récurrence.

   — La propriété est vraie pour n compris entre 0 et 3

   — Supposons la propriété vraie à un rang n soit $X_n = nI + A$

   Comme I et A commutent, on a

$$\begin{aligned} X_n^2 &= (nI + A)^2 \\ &= n^2 I + 2nA + A^2 \\ &= n^2 I + 2nA + 2A - I \\ &= (n^2 - 1)I + 2(n+1)A \\ &= (n-1)(n+1)I + 2(n+1)A \end{aligned}$$

   D'où en remplaçant et simplifiant dans l'expression de X_{n+1}, on obtient $X_{n+1} = (n+1)I + A$: la propriété est donc héréditaire.

   — Grâce au principe de récurrence, la propriété étant initialisée et héréditaire, elle est donc toujours vraie.

   Nous avons alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = nI + A}$

Exercice 2 :

1.

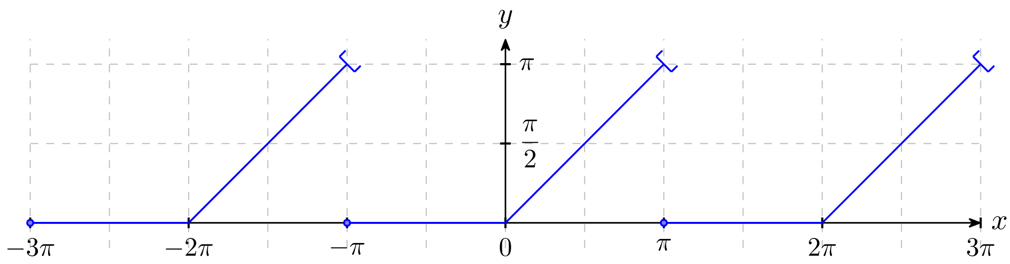

FIGURE 1 – Courbe représentative de f

2. (a) On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{a_0 = \frac{\pi}{4}}$$

(b) $\forall n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Il faut procéder à une intégration par parties en posant $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \cos nt \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \dfrac{1}{n}\sin nt \end{cases}$ avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on en déduit alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{n^2}\left[\cos nt\right]_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} \end{aligned}$$

sachant que $\cos n\pi = (-1)^n$ alors $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}}$

(c) De même, $\forall n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Il faut procéder à une intégration par parties en posant $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin nt \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\dfrac{1}{n}\cos nt \end{cases}$

avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on en déduit alors

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{t\cos nt}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nt\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\left[\sin nt\right]_0^\pi\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0\right] \end{aligned}$$

soit $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ b_n = -\dfrac{(-1)^n}{n}}$

(d) Il faut vérifier les conditions de Dirichlet pour la fonction f :
— f est continue sur $[-\pi\,;\pi[$
— comme f est périodique, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $t_0 = \pi + 2k\pi$
— $f(\pi^-) = \pi$ et $f(\pi^+) = f(-\pi^+) = 0$: f périodique de période 2π
— f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;0[$ et sur $]0\,;\pi[$
— $f'(0^-) = 0 = f'(\pi^+)$
— $f'(0^+) = 1 = f((\pi^-)$
donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet,
— $\forall t \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},\ Sf(t) = f(t)$
— $\forall t_0 = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},\ Sf(t_0) = \dfrac{1}{2}\Big(f(\pi^-) + f(\pi^+)\Big) = \dfrac{\pi}{2}$

3. La série de Fourier de f s'écrit alors $Sf(t) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nt - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt$.

   Pour $t = 0$, comme f y est continue, on a $Sf(0) = f(0) = 0$. On en déduit alors $0 = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$.
   Or quand $n = 2p$ est pair $(-1)^n - 1 = 0$, et pour $n = 2p+1$ impair, $(-1)^n - 1 = -2$. On a alors $0 = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{-2}{(2p+1)^2\pi}$ soit après simplification

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1}^2 = \frac{\pi^2}{8}}$$

4. D'après le critère de Riemann les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}$, et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$ sont convergentes, on en déduit :
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$ soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$ soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

5. (a) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

(b) On a déjà

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que les a_{2p} sont nuls et les a_{2p+1} valent $\dfrac{-2}{\pi(2p+1)^2}$, on en déduit à l'aide de la relation de Parseval :
$\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2(2p+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right).$
Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on en déduit

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

Exercice 3 :
Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. L'équation (H) est de la forme $y'(x) + a(x)\,y(x) = 0$ avec $a : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   a étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \ln x$ étant une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$, le cours nous permet de dire que l'ensemble des solutions de (H) est
   $$S = \left\{ x \mapsto k\mathrm{e}^{-\ln x} = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$
2. L'énoncé nous demande de faire varier la constante comme dans la méthode du même nom.
   Définissons y_p, une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ par
   $$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x}.$$
   y_p est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
   De plus,
   $$y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}.$$
   D'où
   $$\begin{aligned} y_p \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{car } x \mapsto x \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$
   La fonction arctan est solution de cette dernière équation. Ainsi
   $$y_p(x) = \frac{\arctan x}{x}$$
   est solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Comme vu en cours, on ajoute les solutions de (H) avec la solution particulière de (E) pour obtenir toutes les solutions de (E). Ainsi,
   $$S = \left\{ x \mapsto \frac{k}{x} + \frac{\arctan x}{x}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie B – Étude d'une fonction

1. (a) On connaît le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 1 :
   $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$$
   Comme $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, on trouve par substitution le développement limité recherché :
   $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o\left(x^2\right).$$

(b) Par intégration terme à terme du développement précédent,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

D'où, par division par x non nul,

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right).$$

2. f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Le développement limité de f obtenu à la question précédente nous donne

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Cette limite étant finie, on peut prolonger f en 0 en posant $f(0) = 1$.

3. Etudions la limite en 0 du taux d'accroissement défini par

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \frac{f(x) - 1}{x} \\ &= \frac{\frac{-x^2}{3} + o\left(x^2\right)}{x} \\ &= -\frac{x}{3} + o(x) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{x}{3} + o(x)\right) = 0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
La tangente au graphe de f au voisinage de 0 a pour équation $y = 1$.
La position de cette tangente avec le graphe de f est donnée par le signe de $f(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{3}$ au voisinage de 0. Cette expression étant négative au voisinage de 0, le graphe de f est situé sous sa tangente.

4. Par dérivée,

$$\begin{aligned} p'(x) &= 1 - 2x \arctan x - \frac{1 + x^2}{1 + x^2} \\ &= -2x \arctan x. \end{aligned}$$

D'où les variations de p sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$-$	
p	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Les limites sont obtenues en remarquant que $p(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}x^2$ et $p(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}x^2$.
Le signe de p se déduit du tableau de variations : p est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$.

5. Par dérivation :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} \\
&= \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)} \\
&= \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)}.
\end{aligned}$$

f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a vu que f était continue et dérivable en 0. Il reste à montrer que f' est continue en 0 :
D'après le résultat obtenu à la question 1b,

$$\begin{aligned}
p(x) &= x - \left(1+x^2\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) \\
&= \frac{-2x^3}{3} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

On en déduit $p(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-2x^3}{3}$. Comme $x^2\left(1+x^2\right) \underset{0}{\sim} x^2$, alors $f'(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{2x}{3}$.
D'où

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0),$$

ce qui montre que f' est continue en 0 et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6. Le signe de p déterminé précédemment nous donne les variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie C – Calcul approché d'une intégrale

1. La fonction f prolongée par continuité dans la partie B est donc continue sur $[0\,;1]$. L'intégrale I est donc bien définie.

2. Pout tout $x \geqslant 0$,

$$|r_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right| \mathrm{d}t$$

Or,

$$\left|\frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right| = \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

et comme $1+t^2 \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leqslant t^{2n}.$$

Par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geqslant 0$,

$$|r_n(x)| \leqslant \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le résultat est démontré sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $[0\,;1]$.

3. On reconnaît la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-t^2 \neq 1$. D'où :

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-t^2)^n}{1 - (-t^2)} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}. \tag{1}$$

On a de plus :

$$x s_n'(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

De l'égalité (1) on tire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$$

On en déduit par intégration sur $[0\,;x]$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Finalement, on obtient bien $x s_n'(x) = \arctan x - r_n(x)$.

4. D'après la question précédente, $\forall t \in \,]0\,;1]$,

$$s_n'(t) = \frac{\arctan(t)}{t} - \frac{r_n(t)}{t} = f(t) - \frac{r_n(t)}{t}. \tag{2}$$

On a vu dans la partie B que f était continue sur $[0\,;1]$.
D'après la question 2, $\forall t \in [0\,,1]$,

$$\left|\frac{r_n(t)}{t}\right| \leqslant \frac{t^{2n}}{2n+1},$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{r_n(t)}{t} = 0.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{r_n(t)}{t}$ est donc prolongeable par continuité en 0.

Remarque : on peut aussi montrer la continuité de $t \mapsto \dfrac{r_n(t)}{t}$ sur $[0\,;1]$ en remarquant que cette fonction vaut $f - s_n'$, toutes deux continues sur $[0\,;1]$.

Il est donc possible d'intégrer chaque membre de l'égalité (2) sur $[0\,;x]$, $\forall x \in [0\,;1]$:

$$s_n(x) - s_n(0) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{r_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $s_n(0) = 0$, on a :

$$s_n(1) - I = -\int_0^1 \frac{r_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$|s_n(1) - I| = \left|-\int_0^1 \frac{r_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{r_n(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t.$$

Toujours d'après la question 2, $\left|\dfrac{r_n(t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{t^{2n}}{2n+1}$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 \left|\frac{r_n(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Par comparaison, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} |s_n(1) - I| = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(1) = I.$$

5. On cherche un entier N vérifiant $|s_N(1) - I| \leqslant \dfrac{1}{(2N+1)^2} \leqslant 10^{-4}$.

   Ceci revient à résoudre : $\dfrac{1}{2N+1} \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow 2N+1 \geqslant 99$. D'où $N \geqslant 99/2$.
   $S_{50}(1)$ est donc une valeur approchée de I à 10^{-4} près.

6. La fonction `s` en pseudo-code :

   Fonction s(n)
   $s \leftarrow 0$
   pour k *valant de* 0 *à* $n-1$ **faire**
   | $s \leftarrow s + \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$
   fin
   retourner s

   La fonction `s` en `Scilab` :

```
function s=s(n)
    s=0
    for k=0:n-1
        s=s+(-1)^k/(2*k+1)^2
    end
endfunction
```

   Test de la fonction :

```
--> s(10)
 ans  =   0.9147248
--> s(50)
 ans  =   0.9159156
--> s(100)
 ans  =   0.9159531
```

7. La fonction `trouve_N` en pseudo-code :

   Fonction trouve_N(eps)
   $N \leftarrow 0$
   tant que $\dfrac{1}{(2N+1)^2} > eps$ **faire**
   | $N \leftarrow N+1$
   fin
   retourner N

   La fonction `trouve_N` en `Scilab` :

```
function N=trouve_N(eps)
    N = 0
    while 1/(2*N+1)^2 > eps
        N = N + 1
    end
endfunction
```

   Test de la fonction :

```
-> trouve_N(10^-4)
 ans  =   50.
```

   Remarque : la valeur de N peut se trouver directement en suivant la même démarche que pour la question 5. On trouve alors
$$N = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right) \right\rfloor + 1.$$

8. Instructions calculant et affichant une valeur approchée de I à 10^{-10} près :

   En pseudo-code :

   $N \leftarrow$ trouve_N(10^{-10})
   Afficher : $s(N)$

   En `Scilab` :

```
N=trouve_N(10^-10)
s(N)
```

   Test des instructions :

```
--> format(16)
--> N=trouve_N(10^-10)
 N  =   50000.
--> s(N)
 ans  =   0.9159655941272
```

Exercice 4 :

1.

$$\begin{aligned} N(x,y) \in \mathcal{T} &\iff \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MN} \\ &\iff \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \cos\theta \\ y - \sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit $\boxed{\text{une équation de la droite } \mathcal{T} \text{ est } x\cos\theta + y\sin\theta = 1}$

2.

$$\begin{aligned} N(x,y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{BN} \text{sont colinéaires} \\ &\iff \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BN}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} \cos\theta & x \\ \sin\theta & y-1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

soit $\boxed{\text{une équation de la droite } \mathcal{D} \text{ est } -x\sin\theta + y\cos\theta = \cos\theta}$

3. Il suffit de résoudre le système par combinaison linéaire.

   En effectuant $\cos\theta L_1 - \sin\theta L_2$, on obtient immédiatement $x = \cos\theta - \cos\theta\sin\theta$ et avec $\sin\theta L_1 + \cos\theta L_2$, $y = \sin\theta + \cos^2\theta$.

   $\boxed{\text{Le couple solution du système est } (\cos\theta - \cos\theta\sin\theta, \sin\theta + \cos^2\theta)}$

4. D'après les questions précédentes, le point P intersection des deux droites est solution du système résolu donc $\boxed{P(\cos\theta - \cos\theta\sin\theta, \sin\theta + \cos^2\theta)}$

5. Les deux droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont orthogonales à la droite (OM) par construction, donc elles sont parallèles. orthogonales

   Le point U est sur le cercle de diamètre $[OB]$ donc le triangle OUB est rectangle en U ; c'est-à-dire que la droite (OU) est orthogonale à la droite (BP), qui est elle-même parallèle à la droite (OM) donc (OU) est parallèle à $\mathcal{T}$:

   $\boxed{\text{Les droites } \mathcal{T},\ (OU) \text{ et } \mathcal{T}' \text{ sont parallèles}}$

6. Le quadrilatère $OUPM$ est alors un rectangle alors $UP = OM = 1$. De même $UP' = OM' = 1$ d'où $\boxed{UP = UP' = 1}$

7. — Pour $\theta \in [0\,;\pi[$ le point M' est associé au paramètre $\theta + \pi$, par conséquent il en est de même pour le point P' qui se trouve donc sur la courbe $\mathcal{H}$ car $\theta + \pi \in [\pi\,;2\pi[$.
   — Pour $\theta \in [\pi\,;2\pi[$ le point M' est associé au paramètre $\theta - \pi$, par conséquent il en est de même pour le point P' qui se trouve donc sur la courbe $\mathcal{H}$ car $\theta - \pi \in [0\,;\pi[$.

8. $\boxed{\text{Le point } P \text{ est alors à l'intersection du cercle de centre } U \text{, de rayon 1 avec la droite } (BU)}$