Mathématiques - Concours ATS 2023
Proposition de corrigé

Exercice 1 :
Partie A – Étude d'une matrice

1. (a) Comme ${}^tA \neq A$, alors $\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas symétrique réelle.}}$

   (b) En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\det A = -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$:

   $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$
   Le noyau de A n'est alors pas réduit au vecteur nul, donc il existe un vecteur colonne U non nul tel que $AU = 0U$ c'est-à-dire que U est vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.
   $\boxed{\text{Une valeur propre de } A \text{ est } 0.}$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 + L_3 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(4 - \lambda^2)
\end{aligned}$$

   soit

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda(2 - \lambda)(2 + \lambda).}$$

   (b) Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.
   $\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet 3 valeurs propres simples et distinctes } \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 2.}$

   (c) La matrice A admet 3 valeurs propres distinctes, donc, d'après la condition suffisante de diagonalisation, $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$

3. (a) $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \iff AU = \lambda_1 U$ soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} y = -2x \\ 2x + 2z = -2y \\ y = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + \ \ y \qquad = 0 & L_1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ \qquad y + 2z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ 2x + y \qquad = 0 & L_2 \longleftarrow L_1 \\ 2x + y \qquad = 0 & L_3 \longleftarrow L_2 - L_3 \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = -2x \\ z = x \end{cases} . \text{ On a alors } E_{\lambda_1} = \textbf{Vect}\,((1, -2, 1)).$$

   $\boxed{\text{Une base de } E_{\lambda_1} \text{ est le vecteur } (1, -2, 1).}$

(b) De même, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \iff AU = \lambda_2 U$ soit le système suivant à résoudre : $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$. On a alors $E_{\lambda_2} = \textbf{Vect}\,((1, 0, -1))$.

$\boxed{\text{Une base de } E_{\lambda_2} \text{ est le vecteur } (1, 0, -1).}$

(c) De même, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3} \iff AU = \lambda_3 U$ soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 & L_1 \\ 2x - 2y + 2z = 0 & L_2 \\ y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 & L_1 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ 2x - y = 0 & L_2 \longleftarrow L_1 \\ 2x - y = 0 & L_3 \longleftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$ soit

$\begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = x \end{cases}$ On a alors $E_{\lambda_3} = \textbf{Vect}\,((1, 2, 1))$.

$\boxed{\text{Une base de } E_{\lambda_3} \text{ est le vecteur } (1, 2, 1).}$

4. La matrice A est diagonalisable, et on a

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

et une matrice Q de passage, donc inversible, qui est

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

avec $D = Q^{-1}AQ$ soit $A = QDQ^{-1}$

5. En écriture matricielle, le polynôme P a pour coordonnées $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, son image par v a pour coordonnées $AU = \begin{pmatrix} b \\ 2a + 2c \\ b \end{pmatrix}$ soit en écriture vectorielle,

$$\boxed{v(P) = bX^2 + 2(a + c)X + b}$$

6. Les coordonnées de polynôme $X^2 - 2X + 1$ dans la base donnée sont $(1, -2, 1)$, du polynôme $X^2 - 1$, $(1, 0, -1)$ et du polynôme $X^2 + 2X + 1$ sont $(1, 2, 1)$.
On remarque que ces coordonnées sont celles des vecteurs propres de la matrice A qui forment une base, donc $\boxed{\text{la famille } \mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

7. $\boxed{\text{Dans cette base } \mathscr{C}\text{, la matrice de } v \text{ est alors la matrice diagonale } D.}$

Partie B – Étude d'un endomorphisme

1. $\boxed{\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n}$.

2. (a) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Sachant que la dérivation est linéaire, on a immédiatement $f_n(P+Q) = f_n(P) + f_n(Q)$ et pour tout réel λ, $f_n(\lambda P) = \lambda f_n(P)$.
$\boxed{f_n \text{ est une application linéaire.}}$

   (b) — En prenant $P = 1$ d'où $P' = 0$, on obtient $\boxed{f_n(1) = (n-1)X.}$

   — Pour $P = X^{n-1}$ alors $P' = (n-1)X^{n-2}$ d'où $\boxed{f_n(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}.}$

   — Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ $P = X^k$ d'où $P' = kX^{k-1}$ d'où $\boxed{f_n(X^k) = (n-1-k)X^{k+1} + kX^{k-1}.}$

   (c) Comme $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, alors $f_n(X^k)$ est au plus de degré $n-1$, $f_n(1)$ de degré 1 et $f_n(X^{n-1})$ de degré $n-2$, et $f_n(P)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ces $f_n(X^k)$, alors $f_n(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$:
$\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

3. À l'aide de la question précédente pour $n = 3$, on a :
$f_3(1) = 2X,\ f_3(X) = X^2 + 1,\ f_3(X^2) = 2X$. La matrice représentative de f_3 est donnée par l'image des vecteurs de base dans la base de l'espace d'arrivée, c'est-à-dire ici

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. On a $P_k = (X-1)^k(X+1)^{n-1-k}$ d'où $P_k' = k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-1-k} + (n-1-k)(X-1)^k(X+1)^{n-2-k}$.
Comme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ alors
$(X^2-1)P_k' = k(X-1)^k(X+1)^{n-k} + (n-1-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{n-1-k}$.

$$\begin{aligned} f_n(P_k) &= (X-1)^k(X+1)^{n-1-k}\left[(n-1)X - k(X+1) - (n-1-k)(X-1)\right] \\ &= (n-1-2k)(X-1)^k(X+1)^{n-1-k} \end{aligned}$$

soit $f_n(P_k) = (n-1-2k)P_k$.
Comme P_k n'est pas le polynôme nul, cela signifie que
$\boxed{P_k \text{ est vecteur propre de } f_n \text{ associé à la valeur propre } n-1-2k}$

5. k prend n valeurs distinctes entre 0 et $n-1$ donc f_n admet n valeurs propres distinctes. Par conséquent, d'après la condition suffisante de diagonalisation, $\boxed{f_n \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 2 :
Partie A – Deux équations différentielles

1. (a) (E_0) s'écrit $y'' = 0$ donc les solutions sont de la forme $\boxed{t \longmapsto at+b, \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.}$

   (b) Pour $\alpha > 0, (E_\alpha)$ s'écrit $y'' + \alpha y = 0$. Les solutions de cette équation différentielle harmonique sont données par
$$\boxed{t \longmapsto a\cos t\sqrt{\alpha} + b\sin t\sqrt{\alpha}, \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.}$$

2. (a) On a $u(t) = tv(t^2)$ d'où par dérivation d'un produit et des fonctions composées,
$$\boxed{u'(t) = v(t^2) + 2t^2v'(t^2).}$$

   (b) De même, $u''(t) = 2tv'(t^2) + 4tv'(t^2) + 4t^3v''(t^2)$ soit
$$\boxed{u''(t) = 4t^3v''(t^2) + 6tv'(t^2).}$$

   (c) u est solution de (E_α) si et seulement si $u''+\alpha u = 0$, soit pour $t > 0$, $4t^3v''(t^2)+6tv'(t^2)+\alpha tv(t^2) = 0$ c'est-à-dire après simplification par $t \neq 0$, $\boxed{4t^2v''(t^2) + 6v'(t^2) + \alpha v(t^2) = 0.}$
   À l'aide du changement de variable bijectif de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$, $X = t^2$, cela équivaut à $4Xv''(X) + 6v'(X) + \alpha v(X) = 0$, soit en revenant en variable $t = X$,
   $\boxed{u \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ si et seulement si } v \text{ est solution de } (F_\alpha).}$

3. (a) D'après la question précédente, u est solution de (E_0) si et seulement si v est solution de (F_0). Or les solutions de (E_0) sont les fonctions données par $u(t) = at+b$ et $u(t) = tv(t^2)$. D'où, comme $t > 0$, $v(t^2) = a + \dfrac{b}{t}$ soit $v(t) = a + \dfrac{b}{\sqrt{t}}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   En prenant les notations de l'énoncé, on obtient que
   $\boxed{\text{les solutions de } (F_0) \text{ sont les fonctions de la forme } t \longmapsto \dfrac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2 \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.}$

   (b) De même, on obtient $u(t) = tv(t^2) = a\cos t\sqrt{\alpha} + b\sin t\sqrt{\alpha}$ d'où, en prenant les notations de l'énoncé, on obtient pour $\alpha > 0$
   $\boxed{\text{les solutions de } (F_\alpha) \text{ sont les fonctions de la forme } t \longmapsto C_1\dfrac{\cos\sqrt{\alpha t}}{\sqrt{t}} + C_2\dfrac{\sin\sqrt{\alpha t}}{\sqrt{t}} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.}$

Partie B – Une équation aux dérivées partielles

1. $\boxed{U \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^3 \text{, donc pas un fermé de } \mathbb{R}^3.}$

2. (a) La fonction $(x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$ étant un polynôme de degré 2 en x, y, z est donc définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, d'image $]0\,;+\infty[$. Par composée avec la fonction v de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U.}$

   (b) Par dérivation des fonctions composées, on obtient immédiatement
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xv'(x^2+y^2+z^2).}$$

   (c) Par dérivation d'un produit et de fonctions composées, on obtient de même
$$\boxed{\forall (x,y,z) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 4x^2v''(x^2+y^2+z^2) + 2v'(x^2+y^2+z^2).}$$
   Par permutation circulaire des lettres x, y et z, on obtient de même
$$\boxed{\forall (x,y,z) \in U, \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= 4y^2v''(x^2+y^2+z^2) + 2v'(x^2+y^2+z^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= 4z^2v''(x^2+y^2+z^2) + 2v'(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}}$$

(d) À l'aide des questions précédentes, on obtient

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in U, \quad \Delta f = 6v'(x^2+y^2+z^2) + 4(x^2+y^2+z^2)v''(x^2+y^2+z^2).}$$

3. $\Delta f + \alpha f = 0$ équivaut à $6v'(x^2+y^2+z^2) + 4(x^2+y^2+z^2)v''(x^2+y^2+z^2) + \alpha v(x^2+y^2+z^2) = 0$, soit en posant $t = x^2+y^2+z^2 > 0$, on reconnaît l'équation différentielle (F_α).
   $\boxed{f \text{ est solution de } \Delta f + \alpha f = 0 \text{ si et seulement si } v \text{ est solution de } (F_\alpha).}$

4. D'après la question précédente, $\Delta g = 0$ équivaut à v solution de (F_0). On a $v(t) = \dfrac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2$ d'où, par exemple en prenant $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$
   $\boxed{\text{Une solution de } \Delta g = 0 \text{ est } g(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.}$

Exercice 3 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
   $\forall t \in \left]-\pi\,;\pi\right[,\ -t \in \left]-\pi\,;\pi\right[,\ f(-t) = -t\cos t = -f(t)$ à l'aide de la parité de la fonction cosinus.
   $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ car f est 2π-périodique, donc f est impaire sur $[-\pi\,;\pi]$.
   Grâce à la période, $\boxed{f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$

2. (a) f étant impaire, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0.}$

   (b)

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \quad f \text{ est impaire} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos t\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin 2t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   En posant $\begin{cases} u = t \\ v' = \sin 2t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2t \end{cases}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t\sin 2t\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2t\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

   Soit $\boxed{b_1 = -\dfrac{1}{2}.}$

   (c) $\forall n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \quad f \text{ est impaire} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos t\sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\left(\sin(n+1)t + \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} t\sin(n+1)t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} t\sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   En posant $\begin{cases} u = t \\ v' = \sin(n+1)t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -\dfrac{1}{n+1}\cos(n+1)t \end{cases}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t\sin(n+1)t\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t\cos(n+1)t}{n+1}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}\cos(n+1)t\,\mathrm{d}t \\ &= -\pi\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\left[\sin(n+1)t\right]_0^{\pi} \qquad \text{or } \cos k\pi = (-1)^k \\ &= -\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + 0 \\ &= \pi\frac{(-1)^n}{n+1} \end{aligned}$$

En changeant $n+1$ en $n-1$ dans la formule précédente, on obtient également
$\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(n-1)t\,\mathrm{d}t = \pi\frac{(-1)^n}{n-1}$.
On en déduit alors

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad b_n = (-1)^n\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right].}$$

3. (a) Par définition de la fonction, f est continue sur $]-\pi\,;\pi[$ et avec la période 2π, f est continue sur $\mathbb{R}$ privé de $t_k = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
Si $t \neq \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, l'égalité est vraie car f est continue en t.
Si $t = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, les limites quand h tend vers 0 de $f(t+h)$ et $f(t-h)$ sont opposées et valent π ou $-\pi$.
Le membre de droite de l'égalité proposée vaut donc toujours 0 qui est la valeur de $f(t) = f(\pi)$.
Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2}\left(f(t+h)+f(t-h)\right).}$

(b) L'énoncé dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
Donc d'après le théorème de Dirichlet, le série de Fourier converge vers la fonction régularisée, qui est justement obtenue à la question précédente.
Par conséquent, $\boxed{\text{la série de Fourier } Sf \text{ converge vers } f.}$

4. (a) Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} b_n^2 &= \left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right]^2 \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)^2} \end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples immédiate, $\dfrac{2}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$. On en déduit

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}.}$$

(b) On a vu précédemment que $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{(n+1)(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc d'après le théorème sur les équivalents, la série à termes positifs $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) \text{ converge.}}$

En posant pour $N \geqslant 2$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$, on a

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=3}^{N+1}\frac{1}{k} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{N-1}\frac{1}{k}-\left(\sum_{k=3}^{N-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{N}=\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{N+1}=0$ d'où

$$\boxed{\text{la série }\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\text{ converge et }\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}.}$$

(c) Comme $\sum\dfrac{1}{(n+1)^2}$ et $\sum\dfrac{1}{(n-1)^2}$ convergent, séries de Riemann, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}b_n^2&=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{3}{2}\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\left(1+\frac{1}{4}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}b_n^2=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{4}.}$$

5. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f^2(t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^\pi t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1+\cos 2t)t^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi^3}{6}+\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases}u=t^2\\v'=\cos 2t\end{cases}$ d'où $\begin{cases}u'=2t\\v=\dfrac{1}{2}\sin 2t\end{cases}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{2}\left[t^2\sin 2t\right]_0^\pi-\int_0^\pi t\sin 2t\,\mathrm{d}t\\&=0-\int_0^\pi t\sin 2t\,\mathrm{d}t\\&=-\pi b_1\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\int_0^\pi f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}.}$$

(b) À l'aide de la relation de Parseval, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f^2(t)\,\mathrm{d}t&=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\\&=\frac{1}{2}b_1^2+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}b_n^2\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ car f^2 est paire.

On a également $\dfrac{1}{2}b_1^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2 = \dfrac{1}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ d'où l'on tire

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice 4 :

1. La fonction `calculSomme(n)` en pseudo-code et en `Scilab` :

Fonction calculSomme(n)

$s \leftarrow 0$
pour k *valant de* 1 *à* n **faire**
  $s \leftarrow s + \dfrac{1}{k^2}$
fin
retourner s

```
function s=calculSomme(n)
    s=0
    for k=1:n
        s=s+1/(k^2)
    end
endfunction
```

Quelques valeurs de `calculSomme(n)` :

```
--> calculSomme(10)
 ans = 1.5497677
--> calculSomme(100)
 ans = 1.6349839
--> calculSomme(1000)
 ans = 1.6439346
```

2. La fonction `approx(eps)` en pseudo-code et en `Scilab` :

Fonction approx(eps)

$n \leftarrow 1$
tant que $\dfrac{1}{n} > eps$ **faire**
  $n \leftarrow n + 1$
fin
retourner $calculSomme(n)$

```
function s=approx(eps)
    n = 1
    while 1/n > eps
        n = n + 1
    end
    s=calculSomme(n)
endfunction
```

Remarque : il était possible de se passer de boucle `TantQue` en remarquant que $\dfrac{1}{n} \leqslant eps$ est vrai pour tout entier $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{1}{eps} \right\rfloor + 1$. Il suffit donc pour la fonction `approx` de renvoyer $calculSomme\left(\left\lfloor \dfrac{1}{eps} \right\rfloor + 1\right)$. La valeur de $\left\lfloor \dfrac{1}{eps} \right\rfloor + 1$ s'obtient par l'instruction `ceil(1/eps)` en *Scilab*.

Quelques valeurs approchées de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$:

```
--> approx(0.1)
 ans = 1.5497677
--> approx(0.001)
 ans = 1.6439346
--> approx(0.00001)
 ans = 1.6449241
--> %pi^2/6
 ans = 1.6449341
```

Exercice 5 : Partie A - Analyse complexe

1. (a) $(1-\omega)\left(1+\omega+\omega^2\right) = 1-\omega^3 = 0$.
   Comme $\omega \neq 1$, on obtient que $1+\omega+\omega^2 = f(1,1,1) = 0$.
   (b) $f\left(1,\omega,\omega^2\right) = 1+\omega^2+\omega^4 = 1+\omega^2+\omega = 0$
   $f\left(1,\omega^2,\omega\right) = 1+\omega^3+\omega^3 = 3$.
2. (a) $|-\omega| = \left|-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\right| = 1$ et $\arg\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\right) = -\pi/3$.
   (b) $|1-\omega| = \left|1-\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$.
3. Soient $u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$, $v = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{C}^3$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
   On montre aisément que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
   Ainsi, f est linéaire.

Partie B - Triangles équilatéraux

1. $\mathrm{M_1M_2M_3}$ est équilatéral direct si et seulement si $\mathrm{M_1M_2} = \mathrm{M_2M_3}$ et $\widehat{\mathrm{M_1M_2M_3}} = -\pi/3$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M_1M_2} = \mathrm{M_2M_3} &\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_3 - z_2| \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right| = 1 \text{ car } z_2 \neq z_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{M_1M_2M_3}} = -\pi/3 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{M_2M_1}}, \overrightarrow{\mathrm{M_2M_3}}\right) = -\pi/3 \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right) = -\pi/3\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{M_1M_2M_3}$ est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2} = -\omega$.
2. En reprenant la condition précédente :

$$\begin{aligned}\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} = -\omega &\Leftrightarrow z_3 - z_2 = -\omega z_1 + \omega z_2 \\ &\Leftrightarrow \omega z_1 - (1+\omega) z_2 + z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega z_1 + \omega^2 z_2 + z_3 = 0 \text{ car } 1+\omega+\omega^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(z_1, z_2, z_3) = 0\end{aligned}$$

Partie C - Un résultat géométrique

1. En utilisant la condition équivalente de la partie B, $\mathrm{A'CB}$ est équilatéral direct si et seulement si

$$\frac{\alpha'-\beta}{\gamma-\beta} = -\omega$$

   Ce qui équivaut à $\alpha' = \beta - \omega(\gamma - \beta)$.
   De même $\mathrm{ACB'}$ est équilatéral direct si et seulement si

$$\frac{\beta'-\gamma}{\alpha-\gamma} = -\omega$$

   Ce qui équivaut à $\beta' = \gamma - \omega(\alpha - \gamma)$.
   Puis $\mathrm{BAC'}$ est équilatéral direct si et seulement si

$$\frac{\gamma'-\alpha}{\beta-\alpha} = -\omega$$

   Ce qui équivaut à

$$\gamma' = \alpha - \omega(\beta - \alpha)$$

2. (a) $z_{N_B} = \frac{1}{3}\left(\alpha + \gamma + \gamma - \omega\left(\alpha - \gamma\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\left(1-\omega\right)\alpha + \left(2+\omega\right)\gamma\right)$
$z_N = \frac{1}{3}\left(\alpha + \beta + \gamma\right)$.
D'où :

$$\begin{aligned} z_{N_B} - z_N &= \frac{1}{3}\left(-\omega\alpha - \beta + \left(1+\omega\right)\gamma\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-\omega\alpha - \beta - \omega^2\gamma\right) \\ &= -\frac{\omega}{3}\left(\alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta\right) \\ &= -\frac{\omega\delta}{3} \end{aligned}$$

(b) En suivant le même raisonnement, on trouve :

$$z_{N_C} - z_N = -\frac{\omega^2\delta}{3}$$

et

$$z_{N_A} - z_N = -\frac{\delta}{3}$$

3. D'après la question B2, le triangle $\mathrm{N_AN_BN_C}$ est équilatéral direct si et seulement si $f\left(z_{N_A}, z_{N_B}, z_{N_C}\right) = 0$.
Calculons :

$$\begin{aligned} f\left(z_{N_A}, z_{N_B}, z_{N_C}\right) &= f\left(-\frac{\delta}{3} + z_N, -\frac{\omega\delta}{3} + z_N, -\frac{\omega^2\delta}{3} + z_N\right) \text{ d'après les questions C2a et C2b} \\ &= -\frac{\delta}{3} \times f\left(1, \omega, \omega^2\right) + z_N \times f\left(1,1,1\right) \text{ grâce à la linéarité de } f. \\ &= 0 \text{ d'après les questions A1a et A1b.} \end{aligned}$$

Ainsi le triangle $\mathrm{N_AN_BN_C}$ est équilatéral direct.

4. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N_AN_B} &= \left|z_{N_B} - z_{N_A}\right| \\ &= \left|\left(z_{N_B} - z_N\right) - \left(z_{N_A} - z_N\right)\right| \\ &= \left|-\frac{\omega\delta}{3} + \frac{1}{3}\delta\right| \\ &= \frac{1}{3}\left|\delta\right| \times \left|1-\omega\right| \\ &= \frac{\left|\delta\right|}{\sqrt{3}} \text{ d'après la question A2b.} \end{aligned}$$