Concours ATS 2015. Mathématiques. Corrigé

Exercice 1

1. Pour écrire le système (SD) sous forme matricielle $X'(t) = AX(t)$, il suffit de poser :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque. On peut auto-valider cette réponse en lisant la question qui suit

2. (a) Le polynôme caractéristique de la matrice A est par définition :

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & -1 \\ 2 & -1-X & -2 \\ 2 & 1 & -4-X \end{vmatrix}$$

En remplaçant le première colonne par la somme des trois colonnes, on a :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & -1 \\ -1-X & -1-X & -2 \\ -1-X & 1 & -4-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1-X & -2 \\ 1 & 1 & -4-X \end{vmatrix}$$

En soustrayant la première ligne aux deux autres :

$$P_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2-X & -1 \\ 0 & 0 & -3-X \end{vmatrix} = (-1-X)(-2-X)(-3-X)$$

(b) Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique. Donc on résout $P_A(X) = 0$ qui équivaut à $(-1-X)(-2-X)(-3-X) = 0$.
Donc les valeurs propres de A sont -1,-2 et -3.
Remarque. Si on a calculé le polynôme avec la règle de Sarrus, et donc obtenu un polynôme développé de degré 3, on peut argumenter de la manière suivante : en tant que polynôme de degré 3, le polynôme caractéristique a au plus trois racines distinctes deux à deux. Or on vérifie par calcul que les valeurs -1, -2 et -3 annulent ce polynôme, donc ce sont les *racines du polynôme caractéristique et donc* les *valeurs propres.*

3. (a) Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est $E_{-1} = Ker\,(A + I_3)$. Pour le déterminer, on résout donc le système : $\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$.
Donc $E_{-1} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut donc prendre comme vecteur propre $v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Le sous-espace propre associé à la valeur propre -2 est $E_{-2} = Ker\,(A + 2.I_3)$. Pour le déterminer, on résout donc le système : $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$.
Donc $E_{-2} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut donc prendre comme vecteur propre $v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est $E_{-3} = Ker\,(A + 3.I_3)$. Pour le déterminer, on résout donc le système : $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$.

Donc $E_{-3} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut donc prendre comme vecteur propre $v_{-3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) et

(b) La matrice A d'ordre 3 ayant trois valeurs propres distinctes est donc diagonalisable, c'est-à-dire qu'elle est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, où on a mis sur la diagonale les valeurs propres, avec la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, où on a mis en colonnes les vecteurs propres trouvés plus haut.

On a alors $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$.

(c) *Remarque. Dans la mesure où on nous donne la réponse, pour expliciter la matrice P^{-1}, il n'est pas nécessaire d'appliquer la méthode usuelle. Mais si on veut , on peut !*

On sait que si une matrice B vérifie $PB = I_3$ alors P est inversible et $B = P^{-1}$. On calcule donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple le premier "1" s'obtient par $1\times1+1\times0+0\times(-1)$, et le "0" de la première colonne deuxième ligne par $1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times (-1)$. Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. On a intérêt à faire tous les calculs au brouillon pour « vérifier »les résultats des questions précédentes.

5. (a) On a $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $U(0) = P^{-1}.X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $u(0) = 2, v(0) = -1, w(0) = 0$.

(b) En partant de $X'(t) = AX(t)$, vu que $X(t) = P.U(t)$ et donc $X'(t) = P.U'(t)$ (les coefficients de la matrice P étant constants), on a $P.U'(t) = A.P.U(t)$ donc $U'(t) = P^{-1}.A.P.U(t)$ donc $U'(t) = D.U(t)$ puisque $D = P^{-1}AP$.

Remarque. On peut bien sur faire dans l'autre « sens » : $X'(t) = AX(t)$ donc $X'(t) = P.A.P^{-1}.X(t)$ donc $P^{-1}.X'(t) = D.P^{-1}.X(t)$ etc.

(c) Le système $U'(t) = D.U(t)$ est équivalent à $\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = -2v(t) \\ w'(t) = -3w(t) \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$) qui se résout immédiatement :

$\begin{cases} u(t) = C_1e^{-t} \\ v(t) = C_2e^{-2t} \\ w(t) = C_3e^{-3t} \end{cases}$ où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes réelles arbitraires.

Avec les conditions (« initiales »), $u(0) = 2, v(0) = -1$ et $w(0) = 0$, on obtient tout aussi immédiatement : $C_1 = 2, C_2 = -1$ et $C_3 = 0$.

Donc la solution cherchée est $U(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) On a $X(t) = PU(t)$ d'où $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$ (avec $t \in \mathbb{R}$).

Remarque. On peut vérifier en remplaçant dans le système (SD) et les conditions (CI) ...

Exercice 2

1. $f(0) = e^{0^2} \int_0^0 e^{-t^2} \mathrm{d}t = 0.$

2. Soit x un réel quelconque. $f(-x) = e^{(-x)^2} \int_0^{-x} e^{-t^2} \mathrm{d}t = e^{x^2} \int_0^{-x} e^{-t^2} \mathrm{d}t$; en faisant le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale $\int_0^{-x} e^{-t^2} \mathrm{d}t$, on a $\int_0^{-x} e^{-t^2} \mathrm{d}t = -\int_0^{x} e^{-u^2} \mathrm{d}u$; donc $f(-x) = -f(x)$.
   Remarque.On pouvait aussi argumenter en disant que la fonction à intégrer dans étant paire, on a directement $\int_0^{-x} e^{-t^2} \mathrm{d}t = -\int_0^{x} e^{-t^2} \mathrm{d}t$.
   On en déduit que la fonction f est impaire.

3. *Remarque. A priori, on ne demande pas de justifier que la fonction h est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
   La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^{-x^2}$

4. (a) f en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :

   $$f'(x) = 2x.e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2}.e^{-x^2} = 2x.f(x) + 1$$

   (b) $f'(0) = 1$

   (c) Vu le (a), on a $f'(x) - 2x.f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$, donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2x.y = 1$.

5. (a) On se sert du résultat de la question 4. (a).
   La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant positive sur $\mathbb{R}$, $\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$ est positif si x est positif et négatif si x est négatif ; il en résulte que $x.e^{-x^2}. \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$ est positif si x est négatif ou positif (c'est nul pour x nul). Donc $f'(x)$ est positif quel que soit le réel x. On en déduit que f (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Dire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ est convergente signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$ existe et est finie.
   Or, $t \mapsto e^{-t^2}$ étant strictement positive sur $[0, +\infty[$, cette limite est positive ; donc puisque , on a .
   Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^x e^{-t^2} dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \ell > 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$ alors

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

   (c) Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$positif$	0	$positif$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

6. On pose $u_p(x) = \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ avec p entier naturel et x réel.
   Pour x non nul quelconque,

   $$\left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \frac{2^{2p+2}(p+1)!}{(2p+3)!} . \frac{(2p+1)!}{2^{2p}p!} \left|x^2\right| = \frac{2^{2}(p+1)}{(2p+3)(2p+2)} \left|x^2\right| = \frac{2}{2p+3} \left|x^2\right| .$$

   Donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = 0$, donc, d'après le critère de d'Alembert, la série est absolument convergente quel que soit le réel x, donc la rayon de convergence est $+\infty$.

7. *Remarque. A nouveau, a priori, on ne demande pas de justifier la dérivabilité de g*
En tant que somme d'une série entière la fonction g est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence, et donc ici sur $]-\infty, +\infty[$, avec pour tout réel x,

$$g'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}(2p+1)x^{2p}.$$

Remarque. Vu l'énoncé, on pouvait répondre en écrivant :

$$g'(x) = 1 + \frac{4}{6}.3x^2 + ... + \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}(2p+1)x^{2p} + ... = 1 + 2x^2 + ... + \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p} + ...$$

8. On remarque que $2xg(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}x^{2p+2}$. Pour pouvoir soustraire avec la série obtenue ci-dessus donnant $g'(x)$, on « re-indice »en posant : $q = p+1$:

$$2xg(x) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2^{2(q-1)+1}(q-1)!}{(2(q-1)+1)!}x^{2(q-1)+2} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2^{2q-1}(q-1)!}{(2q-1)!}x^{2q}$$

Donc étant donné que $(2q-1)!.(2q) = (2q)!$, on peut écrire :

$$2xg(x) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2^{2q-1}(q-1)!2q}{(2q-1)!2q}x^{2q} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2^{2q}q!}{(2q)!}x^{2q} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p}.$$

Donc $g'(x) - xg(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p} = 1$. C.Q.F.D.

9. L'équation différentielle étant une équation différentielle du premier ordre linéaire de la forme $y'+a(x)y = b(x)$ avec les fonction a et b, respectivement définies par $a(x) = -2x$ et $b(x) = 1$, continues sur $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe une et une seule solution vérifiant une condition initiale donnée. Or f et g vérifient cette équation différentielle et $f(0) = g(0) = 0$. Donc $f = g$.

Exercice 3

1. *Remarque. La fonction f, 2π-périodique, est donnée sur l'intervalle fermé $[-\pi, +\pi]$. On peut donc considérer qu'il est implicite que $f(-\pi) = f(\pi)$ (ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement), ce qui assure la continuité de f en π et donc sur $\mathbb{R}$.*
   La fonction f étant 2π-périodique, il suffit d'étudier la parité de f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ qui est de longueur 2π. Or sur cet intervalle $f(-t) = cos(u(-t)) = cos(-ut) = f(t)$, vu la parité de la fonction cosinus. Donc f est paire.
   Remarque. Dans la mesure où le « graphe »est donné, il me semble que l'argumentation graphique qui consiste à dire que celui-ci admettant l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, la fonction f est paire, est recevable.
2. La représentation graphique de f lorsque $u = \frac{1}{2}$ est :

exo3fig.png

3. (a) *Remarque. Même si l'énoncé le donne implicitement, on peut remarquer que la fonction f étant 2π-périodique, la pulsation est $\omega = 1$.*

   Remarque. A priori, on n'a pas besoin de la parité pour faire les calculs des coefficients de Fourier.

   $$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos\,(ut)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{u} sin\,(ut)\right]_{\pi}^{\pi} = \frac{sin\,(\pi u)}{\pi u}$$

   Pour tout entier n non nul, $a_n(f) = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} cos\,(ut)\,cos\,(nt)\,\mathrm{d}t$, donc avec la formule de trigonométrie rappelée, on linéarise en :

   $$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(cos\,((u+n)t) + cos\,((u-n)t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{u+n} sin\,((u+n)t) + \frac{1}{u-n} sin\,((u-n)t)\right]_{\pi}^{\pi}$$

   donc

   $$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{u+n} sin\,((u+n)\pi) + \frac{1}{u-n} sin\,((u-n)\pi)\right)$$

   On peut remarquer que u étant un réel compris entre 0 et 1, $u+n$ et $u-n$ ne s'annulent pas.

   Or $sin((u+n)\pi) = (-1)^n sin(u\pi)$ et $sin((u-n)\pi) = (-1)^n sin(u\pi)$, donc

   $$a_n(f) = \frac{(-1)^n sin\,(u\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{u+n} + \frac{1}{u-n}\right) = \frac{(-1)^n sin\,(u\pi)}{\pi}\frac{2u}{u^2-n^2}$$

   (b) La fonction f étant paire, pour tout entier n non nul, $b_n = 0$.

   (c) Donc la série de Fourier de f s'écrit

   $$Sf(t) = \frac{sin\,(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n 2u sin\,(u\pi)}{\pi(u^2-n^2)} cos(nt)$$

4. (a) La fonction f vérifie bien les conditions de Dirichlet (périodique et de classe C1 par morceaux sur $\mathbb{R}$) donc la série de Fourier converge quel que soit le réel t. De plus, vu la continuité de f sur $\mathbb{R}$, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$,

   $$f(t) = \frac{sin\,(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2u sin\,(u\pi)}{\pi(u^2-n^2)} cos(nt)$$

(b) Vu la question précédente et vu l'énoncé :

$$Sf(\pi) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u\sin(\pi u)}{n^2-u^2} = f(\pi) = \cos(\pi u)$$

donc

$$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u\sin(\pi u)}{n^2-u^2} = \cos(\pi u)$$

5. (a) f étant périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$(car continue !), d'après le théorème de Parseval, on peut dire que la série $\dfrac{sin^2(\pi u)}{\pi^2u^2} + \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{4u^2sin^2(u\pi)}{\pi^2(u^2-n^2)^2}$ converge et que

$$\frac{sin^2(\pi u)}{\pi^2u^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4u^2sin^2(u\pi)}{\pi^2(u^2-n^2)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Or avec $u = 1/2$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(t/2)\mathrm{d}t$ que l'on linéarise encore avec la formule rappelée (si on a oublié les formules de duplication) avec $a = b = \frac{t}{2}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}(1+cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[t+\sin t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Remarque. Un résultat classique d'élec. valide ce résultat

De plus, toujours avec $u = 1/2$, $\dfrac{sin^2(\pi u)}{\pi^2u^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4u^2sin^2(u\pi)}{\pi^2(u^2-n^2)^2} = \dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(1-4n^2)^2}$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1}\right)^2 = \frac{\pi^2-8}{16}$$

Remarque. La convergence de la série étudiée est donc obtenue de fait.

Exercice 4

1. Les coordonnées d'un vecteur tangent à la parabole au point A sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$.
   On remarque que ce vecteur n'est pas nul.
2. Il en résulte qu'un vecteur normal à la tangente à la parabole en A, compris comme normal à un vecteur directeur de la tangente, a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2a \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Donc une équation de la normale à la parabole en A est donnée par :
   $$\begin{vmatrix} x-a & -2a \\ y-a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - a + 2a(y-a^2) = 0$$
   Donc une équation de la normale à la parabole en A est : $x + 2ay - a - 2a^3) = 0$.
   Remarque. On pouvait aussi faire avec la notion de produit scalaire ...
3. Les coordonnées (x, y) des points d'intersection de la parabole et de la droite déterminée à la question précédente sont les solutions du système :
   $$\begin{cases} x + 2ay - a - 2a^3) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \begin{cases} 2ax^2 + x - a - 2a^3) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$
   Le discriminant de l'équation du second degré (rappel : a est non nul) en x est $\Delta = 1+8a^2+16a^4 = \left(1+4a^2\right)^2$, donc les solutions sont $\dfrac{-1 \pm (1+4a^2)}{4a}$, soit a (normal !) et $-a - \dfrac{1}{2a}$. C.Q.F.D.
4. (a) Pour tout réel x non nul,$h'(x) = -1 + \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1-2x^2}{2x^2}$.
   La fonction h est impaire (pour tout réel$x$ non nul, $h(-x) = x + \frac{1}{2x} = -h(x)$), donc il suffit d'étudier les variations sur $]0, +\infty[$.
   Or pour x positif, $h'(x) > 0$ équivaut à $1 - 2x^2 > 0$ qui équivaut à $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Directement, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$. Et par imparité (ou directement !) $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.
   D'où le tableau de variation de h sur $]0, +\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	positif	0	négatif	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

   La fonction h a donc un maximum relatif en $\frac{\sqrt{2}}{2}$, celui-ci étant égal à $-\sqrt{2}$. Par imparité, h a un minimum relatif en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, celui-ci étant égal à $\sqrt{2}$.
   (b) et
   (c) *Remarque. On ne sait pas trop quelle justification est attendue, notamment vu la question 5 (a). Disons :*

   En application du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h étant continue sur $]0, +\infty[$ et vu le tableau de variation, l'image par h de l'intervalle $]0, +\infty[$ est l'intervalle $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$.
   Vu l'imparité, par symétrie, l'image par h de l'intervalle $]-\infty, 0[$ est l'intervalle $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$.
   Donc l'image par h de $\mathbb{R}^*$ est $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$. Donc $\alpha = -\sqrt{2}$ et $\beta = \sqrt{2}$.

5. (a) On envisage deux cas : $b \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[$ et $b \in \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$.

   Si $b \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[$,vu la continuité et la (stricte) croissance de h sur $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, en application du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul nombre $a_1 \in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ tel que $b = h(a_1)$; de même vu la

continuité et la (stricte) décroissance de h sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$, en application toujours du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul nombre $a_2 \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ tel que $b = h(a_2)$; comme les intervalles $\left]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ sont disjoints, on a bien exactement deux nombres réels distincts a_1 et a_2 tels que $b = h(a_1) = h(a_2)$.
Par imparité, on a de même pour $b \in \left]\sqrt{2},+\infty\right[$. C.Q.F.D.

(b) $b = h(a)$ équivaut à $b = -a - \frac{1}{2a}$ qui équivaut à $2a^2 + 2ba + 1 = 0$.

(c) Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4b^2 - 8$, donc $a = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-2}}{2}$ ce qui donne les deux valeurs de a_1 et a_2.

(d) Si $b = \pm\sqrt{2}$, on constate que l'on a une solution « double », ce qui est « normal » vu l'étude des variations.

6. (a) Les coordonnées du milieu du segment $[A_1A_2]$ sont respectivement :
$\frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-2}}{2}+\frac{-b-\sqrt{b^2-2}}{2}\right) = -\frac{b}{2}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{(-b+\sqrt{b^2-2})^2}{4}+\frac{(-b-\sqrt{b^2-2})^2}{4}\right) = \frac{b^2-1}{2}$

(b) Les coordonnées d'un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{A_1A_2}$ sont respectivement :
$\frac{-b+\sqrt{b^2-2}}{2} - \frac{-b-\sqrt{b^2-2}}{2} = \sqrt{b^2-2}$ et $\frac{(-b+\sqrt{b^2-2})^2}{4} - \frac{(-b-\sqrt{b^2-2})^2}{4} = -b\sqrt{b^2-2}$
qui est bien colinéaire au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées respectives 1 et $-b$.

(c) Une équation de la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$ est donnée par :

$$\begin{vmatrix} x+\frac{b}{2} & 1 \\ y-\frac{b^2-1}{2} & -b \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow bx + y + \frac{1}{2} = 0.$$

(d) En mettant l'équation précédente sous la forme $y = -bx - \frac{1}{2}$, on voit que toutes ces droites coupent l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

(e) *Remarque. A priori la question est incongrue puisque depuis le début de cette question 6 on suppose que b est différent de α et de β. En fait, on doit comprendre : « Que remarque-t-on si on fait tendre b vers α, ou vers β ? »*

Si b tend vers α, les points A_1 et A_2 « tend » vers le point de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ et donc la droite Δ devient la tangente à la parabole en ce point (ce qui permet une vérification).
De même avec β.