

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.*

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 avec la base :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

On notera par une matrice unicolonne les composantes d'un vecteur de E dans une base.

Ainsi la matrice unicolonne des composantes de $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de

E défini par $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique P_A .

3. Montrer que A admet deux valeurs propres distinctes λ et μ à calculer. (Choisir $\lambda < \mu$).
Quelles sont les multiplicités de λ et μ comme racines de P_A ?

4. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de base du sous espace propre $\mathcal{E}_\lambda$. On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de base du sous espace propre $\mathcal{E}_\mu$. On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

6. Peut-on déduire de ce qui précède que A est diagonalisable ?

7. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

[Ne pas calculer P^{-1}]

Partie B

1. Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit la matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $P_{\mathbf{B}}$.

3. Montrer que $\mathbf{B}$ admet trois valeurs propres distinctes, 0 et α , β . (Choisir $\alpha < \beta$)

Quelles sont les multiplicités de 0, de α et de β , comme racines de $P_{\mathbf{B}}$?

4. Déterminer la matrice unicolonne des composantes V_0 dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_0 du sous espace propre $\mathcal{E}_0$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer la matrice unicolonne des composantes V_{α} dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_{α} du sous espace propre $\mathcal{E}_{\alpha}$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

6. Déterminer la matrice unicolonne des composantes V_{β} dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_{β} du sous espace propre $\mathcal{E}_{\beta}$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

7. Peut-on déduire de ce qui précède que $\mathbf{B}$ est diagonalisable ? Justifier.

8. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B}_2 = (v_0, e_1, v_{\alpha}, v_{\beta})$. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{E}$.

9. Calculer les composantes des images par g des vecteurs de $\mathcal{B}_2$, d'abord dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}_2$.

10. En déduire l'expression de la matrice $\mathbf{C}$ de g dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 2

On considère les fonctions 2π -périodiques, f et g définies par :

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = |x| \text{ et } g(x) = x.$$

1.a. Préciser la parité de f ;

1.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction f . On note Sf la somme de la série de Fourier.

2.a. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

2.b. En calculant $Sf(0)$, trouver la somme de la série numérique : $T = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

3. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b non nuls tels que $S = aS + bT$.

4. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique S .

5. Appliquer la relation de Parseval à Sf et trouver la somme de la série numérique :

$$V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

6.a. Soit $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer qu'il existe deux réels c et d non nuls tels que $U = cU + dV$.

6.b. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique U .

7.a. Préciser la parité de g .

7.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction g . On note Sg la somme de la série de Fourier.

8. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction g sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

9. En calculant $Sg\left(\frac{\pi}{2}\right)$, trouver la somme de la série numérique $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

10. Appliquer la relation de Parseval à Sg et retrouver la somme de la série numérique :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

11. Montrer que $\forall x \in [0, \pi[$, $-2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$.

On considère la fonction 2π -périodique, h définie par :

$$\forall x \in]-\pi, 0], h(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, \pi], h(x) = x.$$

12. Exprimer h à l'aide de f et g .

13. En déduire sans aucun calcul la série de Fourier de h .

Exercice 3

On considère l'équation différentielle, définie pour $x \in]0, +\infty[$, de fonction inconnue y :

(E) : $xy'(x) - y(x) = \text{Arctan}(x)$ et l'équation homogène associée (H) $xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer la solution générale de (H).

2. Montrer que la résolution de (E) peut se ramener à calculer l'intégrale :

$$K(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(u)}{u^2} du \text{ pour } x \in]0, +\infty[.$$

Justifier que cette intégrale est convergente.

3. Par une intégration par parties, exprimer $K(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

4. Déterminer trois réels α, β, γ tels que : $\forall u \in \mathbb{R}^*, F(u) = \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta u + \gamma}{u^2+1}$.

5. En déduire le calcul de l'intégrale $K(x)$, puis la solution générale y de (E), en fonction d'une constante d'intégration C .

6. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$ existe et calculer cette limite.

Exercice 4

Soit la courbe C de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

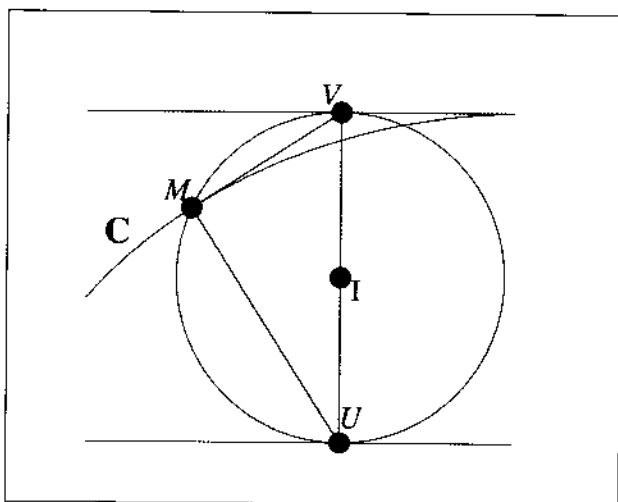
$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos \alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ On note } \mathbf{M}(\alpha) \text{ le point de paramètre } \alpha \text{ de } C.$$

- 1.a. Préciser la parité des fonctions x et y . En déduire une symétrie pour la courbe C .
- 1.b. Donner les coordonnées du milieu du segment $[M(\alpha), M(2\pi - \alpha)]$. En déduire une symétrie pour la courbe C .
- 1.c. Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{M(\alpha)M(\alpha+2\pi)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe C invariante.
- 1.d. Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe C .
- 2.a. Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0, 2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)
- 2.b. Déterminer la limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$. On admettra qu'il en résulte que C admet une tangente verticale en $M(0)$.

2.c. Donner une représentation graphique de C pour $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose maintenant que $\alpha \in]0, \pi[$. On note M le point $M(\alpha)$ de C .

3.a. Donner les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente T à C en M , et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale N à C en M .



3.b. Donner une équation de la droite N normale à C en M . Déterminer les coordonnées du point U , intersection de N avec l'axe (Ox) .

3.c. Donner une équation de la droite T tangente à C en M . Déterminer les coordonnées du point V , intersection de T avec la droite d'équation $y = 2$.

3.d. Que remarque-t-on sur les abscisses des points U et V ?

On appelle I le milieu du segment $[UV]$.

- 4.a. Montrer que le cercle de centre I et de rayon I contient U , V et M .
- 4.b. Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{IM}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IU, IM}$.
- 4.c. Comparer la longueur de l'arc de cercle $\widehat{UM}$ (situé sous la droite (UM)) et la longueur du segment $[OU]$. (O est l'origine du repère).

