

Mathématiques

Concours ATS 2012
Proposition de corrigé

Exercice 1

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on a alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$. L'écriture matricielle de la suite est donc

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On obtient $X_n = A^n X_0$

3. On obtient, par calcul matriciel, $AE_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -E_1$. Comme E_1 est différent du vecteur nul, cela

signifie que E_1 est vecteur propre de A , associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$.

4. (a) En notant I la matrice identité, le polynôme caractéristique P_A de la matrice A est donné par

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 3 \\ -4 & 1-\lambda & 4 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ -\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 + C_3 \rightarrow C_1 \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \\ &= -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

- (b) Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique P_A , d'où la matrice A admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

- (c) Le vecteur propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ vérifie $AE_2 = 0E_2$ c'est-à-dire, en posant

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \text{ qu'il faut résoudre le système } \begin{cases} -3 + \alpha_2 + 3\beta_2 = 0 \\ -4 + \alpha_2 + 4\beta_2 = 0 \\ -2 + \alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ce système devient } \begin{cases} \alpha_2 + 3\beta_2 = 3 & L_1 \\ \alpha_2 + 4\beta_2 = 4 & L_2 \\ \alpha_2 + 2\beta_2 = 2 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 + 3\beta_2 = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \beta_2 = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \beta_2 = 1 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$$

Le vecteur $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A , associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$.

(d) En procédant de la même façon pour la valeur propre $\lambda_3 = 1$, et en posant $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, il faut

$$\text{résoudre le système } \begin{cases} -3 + \alpha_3 + 3\beta_3 = 1 \\ -4 + \alpha_3 + 4\beta_3 = \alpha_3 \\ -2 + \alpha_3 + 2\beta_3 = \beta_3 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} \alpha_3 + 3\beta_3 = 4 \\ 4\beta_3 = 4 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = 1 \end{cases}.$$

Le vecteur $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A , associé à la valeur propre $\lambda_3 = 1$.

5. La matrice carrée d'ordre 3, A , admet trois valeurs propres réelles distinctes, par conséquent, grâce à la condition suffisante de diagonalisation, la matrice A est diagonalisable et A est semblable à la matrice D indiquée avec P matrice de passage, donc inversible, matrice formée des vecteurs E_1, E_2, E_3 . On a donc

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. On a, pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En particulier pour $n \geq 1$, $n = 2k - 1$, $A^{2k-1} = PD^{2k-1}P^{-1}$ avec $D^{2k-1} = D$, d'où $A^{2k-1} = PDP^{-1}$, c'est-à-dire pour tout entier naturel $k > 0$, $A^{2k-1} = A$.

On a $A^{2k} = A \times A^{2k-1} = A \times A$ d'où $A^{2k} = A^2$

Un calcul immédiat nous donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. (a) En utilisant la relation obtenue à la question 2 pour $n = 2k$, on obtient $X_{2k} = A^2X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $u_{2k} = v_{2k} = w_{2k} = 1$.

De même, on a pour $n = 2k - 1$, $X_{2k-1} = AX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $u_{2k-1} = v_{2k-1} = w_{2k-1} = 1$.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n = w_n = 1$

(b) D'après la question précédente,

les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont constantes à partir du rang $n = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$$

8. En procédant de façon identique, on obtient, avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_{2k} = A^2X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_0$, c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{2k} = 1 \\ v_{2k} = 2 \\ w_{2k} = 0 \end{cases}$$

De même, on a pour $n = 2k - 1$, $X_{2k-1} = AX_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_0$, c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{2k-1} = -1 \\ v_{2k-1} = -2 \\ w_{2k-1} = 0 \end{cases}$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) n'ont pas de limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

9. En procédant une nouvelle fois de la même façon, en posant $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, on obtient avec $X_{2k} = A^2 X_0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_{2k} = -u_0 + v_0 + w_0 \\ v_{2k} = v_0 \\ w_{2k} = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}$$

et avec $X_{2k-1} = AX_0$,

$$\begin{cases} u_{2k-1} = -3u_0 + v_0 + 3w_0 \\ v_{2k-1} = -4u_0 + v_0 + 4w_0 \\ w_{2k-1} = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}$$

Les suites d'indice pair et impair étant constantes, ces trois suites sont convergentes si et seulement si les termes d'indice pair et impair sont égaux, c'est-à-dire que u_0 , v_0 et w_0 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -3u_0 + v_0 + 3w_0 &= -u_0 + v_0 + w_0 \\ -4u_0 + v_0 + 4w_0 &= v_0 \\ -2u_0 + v_0 + 2w_0 &= -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire après simplification $u_0 = w_0$.

Les trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes si et seulement $u_0 = w_0$.

Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n = w_n = v_0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = v_0$$

Exercice 2

1. Les deux premières questions peuvent être traitées simultanément.

Démontrons l'existence de la suite de fonctions polynômes par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$. $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x) = (-1)^0 \times 1 \times \varphi(x)$. Ainsi $P_0(x) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n et démontrons-la vraie au rang $n + 1$. Supposons donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P_n , tel que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x) \varphi(x)$. Ainsi en dérivant à nouveau on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= \left(\varphi^{(n)}(x) \right)' = \left((-1)^n P_n(x) \varphi(x) \right)' = (-1)^n P_n'(x) \varphi(x) + (-1)^n P_n(x) \varphi'(x) \\ &= (-1)^{n+1} (-P_n'(x)) \varphi(x) + (-1)^n P_n(x) (-1) P_1(x) \varphi(x) \end{aligned}$$

cette dernière expression peut s'écrire

$(-1)^{n+1} (-P_n'(x)) \varphi(x) + (-1)^n P_n(x) (-1) P_1(x) \varphi(x) = (-1)^{n+1} (-P_n'(x) + P_1(x) P_n(x)) \varphi(x)$. On a ainsi la relation voulue en posant $P_{n+1}(x) = -P_n'(x) + P_1(x) P_n(x)$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et tout } n \in \mathbb{N} \quad \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x) \varphi(x).$$

Calculons maintenant P_1 et P_2 .

$$\varphi^{(1)}(x) = \varphi'(x) = \frac{-2x}{2} e^{\frac{-x^2}{2}} = -x\varphi(x) = (-1)^1 x\varphi(x). \text{ Ainsi } P_1(x) = x.$$

$$\varphi^{(2)}(x) = (\varphi'(x))' = -x\varphi'(x) - \varphi(x) = x^2\varphi(x) - \varphi(x) = (-1)^2(x^2 - 1)\varphi(x). \text{ Ainsi } P_2(x) = x^2 - 1.$$

2. On a démontré dans la récurrence précédente que $P_{n+1}(x) = P_1(x)P_n(x) - P'_n(x) = xP_n(x) - P'_n(x)$ grâce au calcul de $P_1(x)$. On a ainsi $\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = xP'_n(x) - P'_n(x).$

Justifions par récurrence sur n que P_n est de degré n et unitaire (cela signifie que son coefficient dominant $a_n = 1$).

Pour $n = 0$ et $n = 1$, P_0 est bien unitaire, pair et de degré 0, P_1 est unitaire, impair et de degré 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n soit de degré n , de même parité que n et unitaire et démontrons que P_{n+1} est de degré $n + 1$, de même parité que $n + 1$ et unitaire.

Puisque P_n est de degré n , P'_n est de degré $n - 1$. Puisqu'en plus P_n est unitaire, alors xP_n est unitaire et de degré $n + 1$. La différence de xP_n et de P'_n est donc un polynôme de degré $n + 1$ dont le coefficient dominant est celui de xP_n . Le polynôme obtenu est ainsi unitaire.

Puisque P_n est de même parité que n , $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. Ainsi $-P'_n(-x) = (-1)^n P'_n(x)$ et donc

$$\begin{aligned} P_{n+1}(-x) &= (-x)P_n(-x) - P'_n(-x) = -x(-1)^n P_n(x) + (-1)^n P'_n(x) \\ &= (-1)^{n+1}(xP_n(x) - P'_n(x)) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(x). \end{aligned}$$

La propriété est ainsi vérifiée.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n , de même parité que n et unitaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on applique la formule démontrée à la question précédente :

$$P_3(x) = xP_2(x) - P'_2(x) = x(x^2 - 1) - 2x = x^3 - 3x.$$

$$P_4(x) = xP_3(x) - P'_3(x) = x(x^3 - 3x) - (3x^2 - 3) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $X = x^2$. L'équation $P_4(x) = 0$ s'écrit donc $X^2 - 6X + 3 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 36 - 12 = 24$. Les solutions de cette nouvelle équation sont donc

$$X_1 = \frac{6 - \sqrt{24}}{2} = 3 - \sqrt{6} \text{ et } X_2 = \frac{6 + \sqrt{24}}{2} = 3 + \sqrt{6}.$$

Ces deux solutions étant positives, le polynôme P_4 admet quatre racines réelles : $\sqrt{X_1}$, $-\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$ et $-\sqrt{X_2}$.

$$\text{Le polynôme } P_4 \text{ admet quatre racines réelles } \sqrt{3 - \sqrt{6}}, -\sqrt{3 - \sqrt{6}}, \sqrt{3 + \sqrt{6}} \text{ et } -\sqrt{3 + \sqrt{6}}.$$

5. On considère un entier naturel n .

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^k e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$ car la fonction puissance est négligeable devant la fonction exponentielle en l'infini. Puisque P_n est un polynôme, on a donc également

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}} = 0.$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $n > 0$ et considérons deux réels positifs a et b . Puisque la fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues, elle l'est en particulier

sur $[-b, a]$. Pour calculer l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx$, nous allons évaluer la limite de

l'intégrale $\int_{-b}^a \varphi_n(x) dx$ quand a et b tendent vers l'infini.

$$\int_{-b}^a \varphi_n(x) dx = \int_{-b}^a -\varphi'_{n-1}(x) dx = [-\varphi_{n-1}(x)]_{-b}^a = \varphi_{n-1}(-b) - \varphi_{n-1}(a)$$

Or on a montré que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi_{n-1}(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{n-1}(x) e^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \text{ et que } \lim_{b \rightarrow +\infty} \varphi_{n-1}(-b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P_{n-1}(x) e^{\frac{-x^2}{2}} = 0.$$

Ceci permet de conclure que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 0.}$$

- (b) Justifions préalablement la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx$ pour k et n deux entiers quelconques. La fonction $x \mapsto x^k \varphi_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, $x^k \varphi_n(x)$ est équivalent à $(-1)^n e^{\frac{-x^2}{2}} x^{n+k}$ qui ne change pas de signe et qui est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$. En effet, $\frac{(-1)^n e^{\frac{-x^2}{2}} x^{n+k}}{\frac{1}{x^2}} = (-1)^n e^{\frac{-x^2}{2}} x^{n+k+2}$ a une limite nulle en $\pm\infty$. Puisque les intégrales de Riemann $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ convergent, on a la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx$.

Pour réaliser l'intégration par parties, considérons à nouveau deux réels positifs a et b et procédons ensuite à la limite quand a et b tendent vers l'infini.

$$\int_{-b}^a x^k \varphi_n(x) dx = \left[-x^k \varphi_{n-1}(x) \right]_{-b}^a - \int_{-b}^a k x^{k-1} (-\varphi_{n-1}(x)) dx$$

en posant $u = x^k$, $u' = kx^{k-1}$, $v = -\varphi_{n-1}(x)$ et $v' = \varphi_n(x)$. Ainsi on a

$$\int_{-b}^a x^k \varphi_n(x) dx = -a^k \varphi_{n-1}(a) + (-b)^k \varphi_{n-1}(-b) + k \int_{-b}^a x^{k-1} \varphi_{n-1}(x) dx$$

On fait tendre a et b vers l'infini et on utilise le fait que $x^k \varphi_{n-1}(x)$ a une limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$, pour obtenir la relation :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} \varphi_{n-1}(x) dx.}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Procédons par récurrence sur k .

Pour $k = 0$, on a d'une part : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 0$ d'après la question 5a, et d'autre part

$$0! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-0}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 0 \text{ d'après la question 5a.}$$

Soit $0 \leq k < n$. Supposons maintenant l'égalité vraie au rang k et démontrons la vraie au rang $k+1$. D'après la question 5b, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} \varphi_n(x) dx = (k+1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_{n-1}(x) dx$$

Or, $k \leq n-1$, donc on utilise l'hypothèse de récurrence pour justifier que la seconde intégrale est égale à $k! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(n-1)-k}(x) dx$.

On a alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} \varphi_n(x) dx = (k+1)k! \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} \varphi_{n-k-1}(x) dx = (k+1)! \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} \varphi_{n-(k+1)}(x) dx$$

qui est l'égalité voulue. Par récurrence, on a donc montré que :

$$\boxed{\text{pour } 0 \leq k \leq n, \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = k! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x) dx.}$$

Traitons maintenant les deux cas selon que k soit égal ou non à n .

- Si $k < n$, alors d'après la formule démontrée $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = k! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x) dx$ or $n-k > 0$ donc d'après la question 5a $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x) dx = 0$.

– Si $k = n$, alors d'après la formule démontrée précédemment

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \varphi_n(x) dx = n! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-n}(x) dx = n! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = An!$$

en notant A l'intégrale.

Remarquons que φ est strictement positive (et continue) donc l'intégrale est également strictement positive.

Ainsi on a :

Pour $k < n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = 0$ et
Pour $k = n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = An!$ avec $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx > 0$.

(d) Ce n'est pas précisé dans l'énoncé mais m est un entier.

Plaçons nous dans le cas où $m < n$ et considérons a un réel positif.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) \varphi_n(x) dx$$

par définition de φ_n .

On sait que P_n est un polynôme unitaire de degré n , notons alors $P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ (les b_k sont des coefficients réels avec $b_n = 1$)

Pour évaluer l'intégrale impropre, calculons

$$\int_{-b}^a P_m(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-b}^a \sum_{k=0}^m b_k x^k \varphi_n(x) dx = \sum_{k=0}^m b_k \int_{-b}^a x^k \varphi_n(x) dx$$

par linéarité de l'intégrale.

Or, lorsqu'on fait tendre a et b vers l'infini, chacune des intégrales $\int_{-b}^a x^k \varphi_n(x) dx$ a une limite nulle car $k \leq m < n$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = 0$ d'après la question précédente. On a ainsi une somme d'éléments nuls, elle est donc nulle.

Si $m < n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ si $m < n$
--

Plaçons nous dans le cas où $m = n$ et considérons a un réel positif.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

par définition de φ_n .

On sait que P_n est un polynôme unitaire de degré n , notons alors $P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ (les b_k sont des coefficients réels avec $b_n = 1$)

Pour évaluer l'intégrale impropre, calculons

$$\int_{-b}^a P_n(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-b}^a \sum_{k=0}^n b_k x^k \varphi_n(x) dx = \sum_{k=0}^n b_k \int_{-b}^a x^k \varphi_n(x) dx$$

par linéarité de l'intégrale.

Or, lorsqu'on fait tendre a et b vers l'infini, les intégrales $\int_{-b}^a x^k \varphi_n(x) dx$ ont une limite nulle si $k < n$ et une limite égale à $An!$ dans le cas où $k = n$. On a ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = b_n An!$$

Comme P_n est unitaire, $b_n = 1$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x) e^{\frac{-x^2}{2}} dx = An!$$

Exercice 3

1. Soit $t \in [0, 1]$.

- On a : $G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-|t-n|}$. Or $t \leq 1$ et $n \geq 1$ donc $t \leq n$ et $|t-n| = n-t$. On a donc : $e^{-|t-n|} = e^{t-n} = e^t(e^{-1})^n$, qui est le terme général d'une suite géométrique de raison e^{-1} . Comme $e^{-1} \in]-1, 1[$, la série de terme général $e^t(e^{-1})^n$ est convergente, et sa somme vaut :

$$G(t) = e^t \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-1})^n = e^t \times \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = e^t \times \frac{1}{e - 1}.$$

On en conclut que :

$$G(t) = \frac{e^t}{e - 1}.$$

- On a : $H(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(t+k)$ (obtenu par changement d'indice $k = -n$), donc :

$H(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-|t+k|}$. Or $t \geq 0$ et $k \geq 1$ donc $t+k \geq 0$ et $|t+k| = t+k$. On a donc : $e^{-|t+k|} = e^{-(t+k)} = e^{-t}(e^{-1})^k$, qui est le terme général d'une suite géométrique de raison e^{-1} . Comme $e^{-1} \in]-1, 1[$, la série de terme général $e^{-t}(e^{-1})^k$ est convergente, et sa somme vaut :

$$H(t) = e^{-t} \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-1})^k = e^{-t} \times \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = e^{-t} \times \frac{1}{e - 1}.$$

On en conclut que :

$$H(t) = \frac{e^{-t}}{e - 1}.$$

2. Soit $t \in [0, 1]$. Comme les séries $G(t)$ et $H(t)$ sont convergentes on peut écrire :

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) + \underbrace{f(t)}_{\text{pour } n=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) = H(t) + e^{-|t|} + G(t).$$

Or $t \geq 0$ donc $|t| = t$, et en utilisant les expressions trouvées à la question 1, on obtient :

$$F(t) = \frac{e^{-t}}{e - 1} + e^{-t} + \frac{e^t}{e - 1} = \frac{1}{e - 1} (e^t + e^{-t}) + e^{-t}.$$

3. Montrons d'abord que F est définie sur $\mathbb{R}$. Pour cela on montre que G et H le sont. On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |t-n| \geq |n| - |t| \quad \text{et} \quad |t+n| \geq |n| - |t|.$$

On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-|t-n|} \leq e^t e^{-n} \quad \text{et} \quad e^{-|t+n|} \leq e^t e^{-n}.$$

Soit alors $t \in \mathbb{R}$. Comme les séries de termes généraux $e^{-|t-n|}$ et $e^{-|t+n|}$ sont des séries à termes positifs, et que leurs termes généraux sont majorés par $e^t e^{-n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison e^{-1} , on en conclut que ces séries convergent, et donc que $G(t)$ et $H(t)$, puis $F(t)$, sont bien définis.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-t-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-n|} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t+n|}.$$

En faisant le changement d'indice $k = -n$ on obtient :

$$F(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-k|} = F(t).$$

On en déduit que F est paire.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(t+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+1-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t+1-n|}.$$

En faisant le changement d'indice $k = n - 1$ on obtient :

$$F(t+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-k|} = F(t).$$

On en déduit que F est 1-périodique.

- À l'aide de la formule (2), on trouve :

$$F(0) = F(1) = \frac{e+1}{e-1}.$$

La formule (2) nous permet d'affirmer que F est continue sur $]0, 1[$, et continue à droite de 0 et à gauche de 1. Par 1-périodicité, elle est donc continue sur tout intervalle de la forme $]n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et continue à droite de n et à gauche de $n+1$. De plus, comme $F(0) = F(1)$ et que la fonction F est 1-périodique, on en déduit que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$.

On définit les fonctions $u: t \mapsto \frac{e^t}{1+a^2}(\cos(at) + a \sin(at))$ et $v: t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+a^2}(-\cos(at) + a \sin(at))$ sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \frac{e^t}{1+a^2} \left(\cos(at) + \cancel{a \sin(at)} - \cancel{a \sin(at)} + a^2 \cos(at) \right) = e^t \cos(at).$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v'(t) = \frac{e^{-t}}{1+a^2} \left(\cos(at) - \cancel{a \sin(at)} + \cancel{a \sin(at)} + a^2 \cos(at) \right) = e^{-t} \cos(at).$$

- La fonction F est paire, donc ses coefficients de Fourier $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont nuls. On en déduit que la série de Fourier de F peut s'écrire

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n t),$$

où :

$$a_0 = \int_0^1 F(t) dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 2 \int_0^1 F(t) \cos(2\pi n t) dt.$$

- On commence par réécrire l'expression de F sur $[0, 1]$ obtenue à la question 2 :

$$\forall t \in [0, 1], \quad F(t) = \frac{1}{e-1}(e^t + e^{-t}) + e^{-t} = \frac{1}{e-1}e^t + \frac{e}{e-1}e^{-t}.$$

On calcule alors a_0 :

$$a_0 = \int_0^1 F(t) dt = \frac{1}{e-1} [e^t]_0^1 + \frac{e}{e-1} [-e^{-t}]_0^1 = \frac{1}{e-1}(e-1) + \frac{e}{e-1}(1-e^{-1}).$$

On trouve donc :

$$\boxed{a_0 = 2.}$$

Ensuite on utilise les résultats de la question 5 pour calculer les coefficients de Fourier $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de F . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n = 2 \int_0^1 F(t) \cos(2\pi nt) dt = \frac{2}{e-1} \int_0^1 e^t \cos(2\pi nt) dt + \frac{2e}{e-1} \int_0^1 e^{-t} \cos(2\pi nt) dt.$$

On a donc :

$$a_n = \frac{2}{e-1} \left[\frac{e^t}{1+4\pi^2 n^2} (\cos(2\pi nt) + 2\pi n \sin(2\pi nt)) \right]_0^1 + \frac{2e}{e-1} \left[\frac{e^{-t}}{1+4\pi^2 n^2} (-\cos(2\pi nt) + 2\pi n \sin(2\pi nt)) \right]_0^1.$$

En utilisant le fait que $\sin(n\pi) = 0$ et que $\cos(2\pi n) = 1$ pour tout entier n , on trouve :

$$\boxed{a_n = \frac{4}{1+4\pi^2 n^2}.$$

8. La fonction F est périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (en effet elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ au vu de l'expression (2), et les nombres dérivés à droite de 0 et à gauche de 1 existent et sont finis (ils valent respectivement -1 et 1)), donc le théorème de Dirichlet s'applique et permet d'affirmer que la série de Fourier $S(t)$ de F est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa somme vaut $F(t)$. On a donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = 2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{1+4\pi^2 n^2}.$$

9. On applique le résultat de la question 8 en $t = 0$. On trouve :

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2} = \frac{3-e}{4(e-1)}.$$

10. On applique le théorème de Parseval :

$$\int_0^1 F^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

On obtient donc :

$$M = 4 + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2 n^2)^2}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2 n^2)^2} = \frac{M-4}{8}.$$

On peut calculer M . On trouve : $M = \frac{e^2 + 2e - 1}{(e-1)^2}.$

Exercice 4

1. La courbe $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $y^2 = x$, c'est-à-dire : $y^2 = 2px$ avec $p = \frac{1}{2}$.

$\mathcal{P}$ est la parabole de foyer de coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ et de directrice la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$, c'est-à-dire $x = -\frac{1}{4}$.

2. Les applications $x : t \mapsto t^2$ et $y : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout t réel $(x'(t), y'(t)) = (2t, 1) \neq (0, 0)$: tous les points de la parabole sont des points réguliers, et $(x'(t), y'(t))$ est un vecteur directeur de la tangente au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.

On peut prendre : $\vec{T}(t)(2t, 1)$ et $\vec{N}(t)(-1, 2t)$.

3. T_A est la droite passant par $A(a^2, a)$ et dirigée par $\vec{T}(a)(2a, 1)$.

Soit $E(x, y)$, E appartient à T_A si et seulement si $\det(\vec{AE}, \vec{T}(a)) = 0$.

Or :

$$\det(\vec{AE}, \vec{T}(a)) = \begin{vmatrix} x - a^2 & 2a \\ y - a & 1 \end{vmatrix} = x - a^2 - 2ay + 2a^2 = x - 2ay + a^2$$

T_A a pour équation : $x - 2ay + a^2 = 0$.

Quelle que soit la valeur du paramètre réel a , T_A n'est pas parallèle à l'axe des abscisses, donc le point A' intersection de T_A avec l'axe des abscisses existe bien. Les coordonnées de A' sont le couple solution du système : $\begin{cases} x - 2ay + a^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Les coordonnées de A' sont $(-a^2, 0)$.

En substituant le paramètre b au paramètre a , on a de même :

T_B a pour équation : $x - 2by + b^2 = 0$. Les coordonnées de B' sont $(-b^2, 0)$.

4. Les coordonnées de I , milieu du segment $[AB]$, sont $\left(\frac{a^2 + b^2}{2}, \frac{a + b}{2}\right)$.

5. $a \neq b$ donc les vecteurs $\vec{T}(a)(2a, 1)$ et $\vec{T}(b)(2b, 1)$ ne sont pas colinéaires : les deux tangentes T_A et T_B ne sont pas parallèles et possèdent donc bien un point d'intersection M .

Les coordonnées de M sont le couple solution du système (S) : $\begin{cases} x - 2ay + a^2 = 0 \\ x - 2by + b^2 = 0 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2ay = -a^2 \\ x - 2by = -b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2ay = -a^2 \\ 2(a - b)y = a^2 - b^2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

On rappelle qu'on a bien $a \neq b$ donc on peut diviser la deuxième équation par $2(a - b)$ et en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a\frac{a+b}{2} - a^2 \\ y = \frac{a+b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ab \\ y = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de M , point d'intersection de T_A et T_B , sont $\left(ab, \frac{a+b}{2}\right)$.

6. Les points I et M ont la même ordonnée $\frac{a+b}{2}$.

7. L'ordonnée de C est égale à celle de I donc C est le point de la parabole $\mathcal{P}$ de paramètre $\frac{a+b}{2}$.

$$\boxed{C \text{ a pour coordonnées } \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2, \frac{a+b}{2} \right).}$$

8. La tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est dirigée par $\vec{T} \left(\frac{a+b}{2} \right)$ dont les composantes sont $(a+b, 1)$.

La droite (AB) est dirigée par $\vec{AB}$ de composantes $(b^2 - a^2, b - a) = ((b-a)(b+a), b-a)$.

Comme $\vec{AB} = (b-a)\vec{T} \left(\frac{a+b}{2} \right)$, ces deux vecteurs sont colinéaires.

$$\boxed{T_C \text{ et } (AB) \text{ sont parallèles.}}$$

9. Figure demandée par l'énoncé :

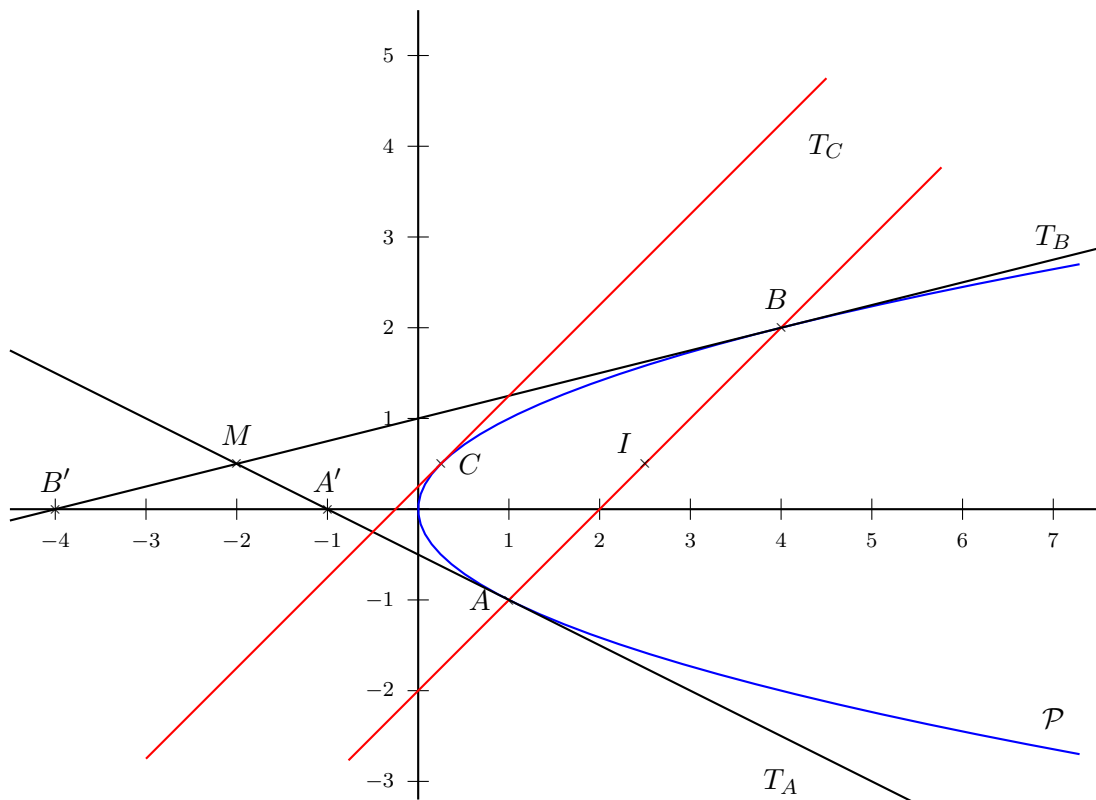


FIGURE 1 – Représentation graphique de la courbe $\mathcal{P}$