

Durée : 3 heures. Coefficient : 3
 Les exercices sont indépendants.
 La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

On veut calculer les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à 3 lignes et une colonne.

- Déterminer la matrice carrée A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
- Donner une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .
- Montrer que $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice A . Donner la valeur propre, λ_1 qui lui est associée.
- Déterminer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A .
 - Montrer que la matrice A admet trois valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ à déterminer, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. [λ_1 est la valeur propre trouvée à la question 3]
 - Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 de la forme $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_3 de la forme $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$.
- Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. On ne demande pas de calculer P^{-1} .
- Exprimer pour tout entier naturel n la matrice A^n à l'aide de P , D et P^{-1} et n . En déduire que pour tout entier naturel non nul k , $A^{2k-1} = A$ et $A^{2k} = A^2$. Calculer A^2 .
- On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déduire de ce qui précède l'expression de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Montrer que dans ce cas, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un certain rang à préciser. Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- On suppose ici que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer en fonction de la parité de n l'expression des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Préciser lesquelles n'ont pas de limite.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 , v_0 , w_0 pour que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Quelles sont alors les limites de ces suites ?

Exercice 2

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$. $\varphi^{(n)}$ désigne sa dérivée n -ième, avec $\varphi^{(0)} = \varphi$.

1. Montrer par récurrence sur n qu'il existe une suite de fonctions polynômes P_n telles que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x) \varphi(x)$. Calculer P_0 , P_1 et P_2 .
2. Montrer par récurrence sur n la relation $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P'_n(x)$. En déduire que P_n est un polynôme de degré n , de même parité que n , de coefficient dominant $a_n = 1$.
3. Calculer $P_3(x)$ et $P_4(x)$.
4. Montrer que $P_4(x)$ admet quatre racines réelles. Calculer ces racines.
5. On pose $\varphi_n(x) = P_n(x)e^{\frac{-x^2}{2}} = (-1)^n \varphi^{(n)}(x) = -\varphi'_{n-1}(x)$ avec $\varphi_0(x) = \varphi(x)$.
 - (a) Justifier que pour tout entier naturel n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = 0$. En déduire que pour $n > 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 0$.
 - (b) Soient deux entiers k et n , avec $0 < k \leq n$. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} \varphi_{n-1}(x) dx$.
 - (c) Montrer que pour $0 \leq k \leq n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = k! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x) dx$. En déduire que
 - si $k < n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = 0$;
 - si $k = n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = An!$ avec $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx > 0$. [Ne pas chercher à calculer A .]
 - (d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) P_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0$ si $m < n$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x) e^{\frac{-x^2}{2}} dx = An!$

Exercice 3

Soient les fonctions f et F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(t) = e^{-|t|}$ et $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n)$ (1).

1. Soit $t \in [0, 1]$. Justifier la convergence des séries puis calculer les sommes de

$$G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) \quad \text{et} \quad H(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(t+k).$$

2. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ $F(t) = H(t) + e^{-|t|} + G(t) = A(e^t + e^{-t}) + e^{-t}$ (2) avec $A = \frac{1}{e-1}$.
3. Montrer, à partir de la définition (1), que $F(t)$ est paire et de période 1.
4. A l'aide de la formule (2), calculer $F(0)$ et $F(1)$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que pour tout réel a , une primitive de $e^t \cos(at)$ est $\frac{e^t}{1+a^2}(\cos(at) + a \sin(at))$, et qu'une primitive de $e^{-t} \cos(at)$ est $\frac{e^{-t}}{1+a^2}(-\cos(at) + a \sin(at))$.
6. Montrer que la somme de la série de Fourier de F peut s'écrire $S(t) = a_0 + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(2\pi nt)$.
7. Déduire de ce qui précède la valeur de a_0 et de a_n en fonction de n . [Il est bon de remarquer que $\sin(\pi n)$ s'annule pour tout n entier.]
8. Expliquer à l'aide d'un théorème pourquoi la série de Fourier $S(t)$ est convergente. Quelle est sa somme?
9. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$.
10. Soit $M = \int_0^1 F^2(t) dt$. On ne demande pas de calculer M . Exprimer à l'aide de M la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2 n^2)^2}$ en justifiant votre réponse.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$, t étant un paramètre réel.

1. Reconnaître la nature de cette courbe.
2. Donner les composantes d'un vecteur tangent $\vec{T}(t)$ et d'un vecteur normal $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.
On considère deux points quelconques A et B de cette courbe qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes a et b du paramètre t .
3. Donner une équation de la droite T_A tangente au point A à la courbe $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées de l'intersection A' de T_A avec l'axe des abscisses.
De même, donner une équation de la tangente T_B au point B à la courbe $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de l'intersection B' de T_B avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
5. Déterminer les coordonnées du point M , point d'intersection des deux tangentes T_A et T_B .
6. Comparer les ordonnées des points I et M .
7. Déterminer les coordonnées du point C qui appartient à la courbe $\mathcal{P}$ et dont l'ordonnée est égale à celle de I .
8. Démontrer que la tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est parallèle à la droite (AB) .
9. Pour $a = -1$ et $b = 2$, faire une figure comportant $\mathcal{P}$, A , B , A' , B' , $[AB]$, $T_A = (AA')$, $T_B = (BB')$, I , M , C , T_C .