

Corrigé

Exercice 1

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et impaire, donc  $\boxed{f(0) = 0}$ .
2. On trace le graphe de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi[$ ; ensuite, par  $2\pi$ -périodicité, le graphe sur  $[-\pi ; 0[$  est le même que sur  $[\pi ; 2\pi[$ , et le graphe sur  $[2\pi ; 3\pi]$  le même que sur  $[0 ; \pi]$ . On obtient donc le graphe de  $f$  sur  $[-\pi ; 3\pi]$  (voir figure 1) :

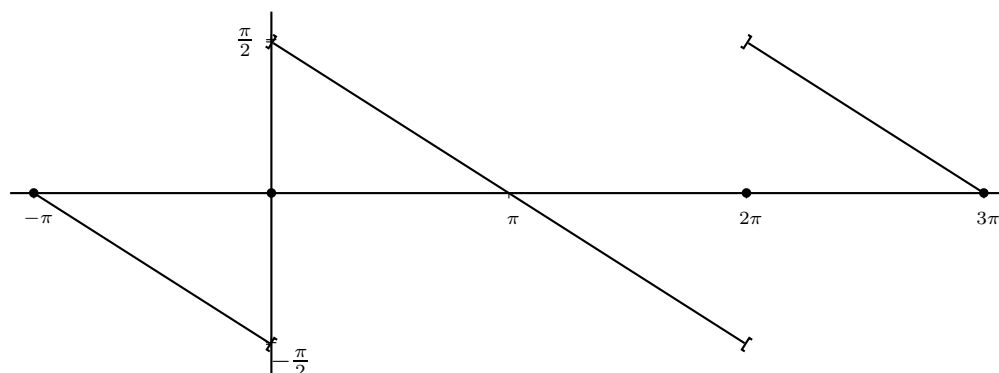


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction  $f$

3. On définit les coefficients de Fourier  $a_0$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $f$  par :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx ,$$

$$\text{et : } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx .$$

Par  $2\pi$ -périodicité de  $f$  et de la fonction  $x \mapsto \cos(nx)$ , on peut écrire :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \quad \text{et} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx ,$$

puis comme  $f$  est impaire et  $x \mapsto \cos(nx)$  paire, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0} .$$

Il reste à calculer les coefficients  $b_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \times \frac{\pi - x}{2} \times \cos(nx) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx \quad (\text{par intégration par parties}) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2n} \cos(2n\pi) + \frac{\pi}{2n} \cos(0) \right) - \frac{1}{2\pi n} \left[ \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{n} \quad \text{puisque } \cos(0) = \cos(2n\pi) = 1 \text{ et } \sin(0) = \sin(2n\pi) = 0. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

La série de Fourier associée à  $f$  au point  $x \in \mathbb{R}$  est donc la série  $S_f(x) = \sum \frac{\sin(nx)}{n}$ .

Comme la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de Dirichlet s'applique et montre que la série de Fourier associée à  $f$  au point  $x$  est convergente pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ; on a de plus la valeur de sa somme :

- si  $x$  est un point de continuité de  $f$ , alors :  $S_f(x) = f(x)$ ;
- si  $x$  est un point de discontinuité de  $f$ , alors :  $S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ .

Or les points de discontinuité de  $f$  sont les  $2n\pi$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Par  $2\pi$ -périodicité de  $f$ , on a :

$$\frac{f((2n\pi)^+) + f((2n\pi)^-)}{2} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 = f(0),$$

donc on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x). \quad (1)$$

4. Remarquons que, comme  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et impaire, on a  $g(0) = 0$ . On trace ensuite le graphe de  $g$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ ; puis, comme  $g$  est impaire, on obtient son graphe sur  $[-\pi; 0]$  par symétrie par rapport à l'origine du repère. Enfin, par  $2\pi$ -périodicité, le graphe de  $g$  sur  $[\pi; 3\pi]$  est le même que sur  $[-\pi; \pi]$ . On obtient donc le graphe de  $g$  sur  $[-\pi; 3\pi]$  (voir figure 2) :

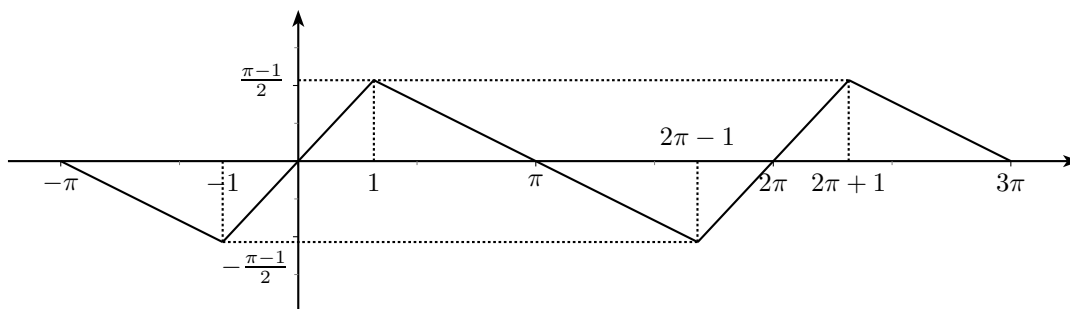


FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction  $g$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(nx) \, dx &= \left[ -\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(nx)}{n} \, dx \\ &= -\frac{\cos(n)}{n} + \left[ \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2}. \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 x \sin(nx) \, dx = -\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

Comme  $f$  et  $g$  sont égales sur l'intervalle  $]1 ; \pi]$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi (g(x) - f(x)) \sin(nx) \, dx &= \int_0^1 (g(x) - f(x)) \sin(nx) \, dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{x(\pi-1)}{2} - \frac{\pi-x}{2} \right) \sin(nx) \, dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{x\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \sin(nx) \, dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[ \int_0^1 x \sin(nx) \, dx - \int_0^1 \sin(nx) \, dx \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} - \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^1 \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sin(n)}{n^2} - \frac{1}{n} \right).
 \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (g(x) - f(x)) \sin(nx) \, dx = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sin(n)}{n^2} - \frac{1}{n} \right)}.$$

On définit les coefficients de Fourier  $\alpha_0$ ,  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $g$  par :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \, dx,$$

$$\text{et : } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos(nx) \, dx \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx) \, dx.$$

Comme  $g$  est impaire et  $x \mapsto \cos(nx)$  est paire, on déduit, comme à la question 3, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = 0}.$$

Il reste à calculer les coefficients  $\beta_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi g(x) \sin(nx) \, dx \quad (\text{par } 2\pi\text{-périodicité de la fonction } x \mapsto g(x) \sin(nx)) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) \, dx \quad (\text{par parité de la fonction } x \mapsto g(x) \sin(nx)) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^\pi (g(x) - f(x)) \sin(nx) \, dx + \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sin(n)}{n^2} - \frac{1}{n} \right) + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx}_{= b_n = \frac{1}{n}} \\
 &= \frac{\sin(n)}{n^2}.
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = \frac{\sin(n)}{n^2}}.$$

La série de Fourier associée à  $g$  au point  $x \in \mathbb{R}$  est donc la série  $S_g(x) = \sum \frac{\sin(n) \sin(nx)}{n^2}$ .

6. Comme la fonction  $g$  est  $2\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de Dirichlet s'applique et montre que la série de Fourier associée à  $g$  au point  $x$  est convergente pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ; on a de plus la valeur de sa somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_g(x) = g(x),$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n) \sin(nx)}{n^2}}. \quad (2)$$

7. La relation (1) appliquée en  $x = 1$  donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2},$$

et la relation (2) appliquée en  $x = 1$  donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = g(1) = f(1) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}}.$$

8. Le théorème de Parseval appliqué à la fonction  $g$  s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx = \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2),$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (g(x))^2 dx \quad (\text{par } 2\pi\text{-périodicité et parité de } g^2) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^1 x^2 \left( \frac{\pi - 1}{2} \right)^2 dx + \int_1^{\pi} \left( \frac{\pi - x}{2} \right)^2 dx \right] \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{\pi - 1}{2} \right)^2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{\pi - x}{2} \right)^3 \right]_1^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\pi - 1}{2} \right)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\pi - 1}{2} \right)^3 \right) \\ &= \frac{2}{3\pi} \left( \frac{\pi - 1}{2} \right)^2 \left( 1 + 2 \times \frac{\pi - 1}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{\pi - 1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(\pi - 1)^2}{6}. \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}}.$$

## Exercice 2

### Partie A

1. On a  $\det(\mathcal{B}') = 27$ , ce qui signifie que la famille  $\mathcal{B}'$  est une famille libre, donc forme une base de  $E$ .

On vérifie aussi que les produits scalaires  $\vec{i} \cdot \vec{j}$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{k}$  et  $\vec{j} \cdot \vec{k}$  sont nuls : les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont donc orthogonaux deux à deux.

La famille  $\mathcal{B}'$  est alors une base orthogonale de  $E$ .

2. Par calcul, on obtient

$$S^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I.$$

Ensuite,

$$S^2 = 9I \iff \frac{1}{9}S \times S = S \times \left(\frac{1}{9}S\right) = I,$$

ce qui montre que  $S$  est inversible, et  $S^{-1} = \frac{1}{9}S$ .

3. On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie que le vecteur  $\vec{i} (\neq \vec{0})$  est un vecteur propre de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_1 = -9$ .

On vérifie de même que :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que le vecteur  $\vec{j} (\neq \vec{0})$  est un vecteur propre de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_2 = 9$ .

Et enfin :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que le vecteur  $\vec{k} (\neq \vec{0})$  est un vecteur propre de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_2 = 9$ .

La matrice  $A$  admet alors  $-9$  comme valeur propre simple et  $9$  pour valeur propre double. La dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre double est 2. Par conséquent, la matrice  $A$  est diagonalisable dans cette base de vecteurs propres.

La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est, avec les notations de l'énoncé, la matrice  $S$ .

La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est

$$D_1 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors, grâce à la formule de changement de base

$$\begin{aligned} D_1 &= S^{-1}AS \\ \iff A &= SD_1S^{-1} \\ \iff A &= SD_1\left(\frac{1}{9}S\right) \\ \iff A &= S\left(\frac{1}{9}D_1\right)S \\ \iff A &= SDS \end{aligned}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a, comme  $D^2 = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{pmatrix} = I$ ,

$$\begin{aligned} A^2 &= SDS \times SDS \\ &= SDS^2DS \\ &= 9SD^2S \quad (\text{puisque } S^2 = 9I) \\ &= 9S^2 \\ &= 81I. \end{aligned}$$

## Partie B

1. En posant

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}$$

on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix},$$

et le système  $(SD)$  se transforme en écriture matricielle sous la forme

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)}.$$

2. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a  $U(t) = SX(t)$ , d'où

$$\begin{aligned} U'(t) &= SX'(t) \\ &= SAX(t) \\ &= S(SDS)X(t) \\ &= S^2DSX(t) \\ &= 9ID(SX(t)) \\ &= 9DU(t). \end{aligned}$$

En traduisant ceci à l'aide des composantes, nous obtenons :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = -9u(t) \\ v'(t) = 9v(t) \\ w'(t) = 9w(t). \end{cases}}$$

Nous avons la condition initiale suivante :  $U(0) = SX(0) = \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{cases} u(0) = 27 \\ v(0) = 27 \\ w(0) = 0. \end{cases}}$$

3. En résolvant chacune des équations différentielles linéaires du premier ordre, nous obtenons :

$$\exists(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = k_1 e^{-9t} \\ v(t) = k_2 e^{9t} \\ w(t) = k_3 e^{9t}. \end{cases}$$

Compte tenu des conditions initiales, nous avons finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = 27e^{-9t} \\ v(t) = 27e^{9t} \\ w(t) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} 27e^{-9t} \\ 27e^{9t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $m_t$  le point de coordonnées  $(u(t), v(t), w(t))$  dans le repère  $\mathcal{R}'$  (qui est orthogonal mais pas orthonormé comme le dit l'énoncé); on en déduit que le vecteur  $\overrightarrow{Om_t}$  a pour coordonnées  $(27e^{-9t}, 27e^{9t}, 0)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , donc qu'il appartient au plan engendré par les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . Le vecteur  $\vec{k}$  étant orthogonal à ce plan, on en déduit que le vecteur  $\vec{k}$  est orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{Om_t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On peut donc choisir

$\vec{n} = \vec{k}$ , et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{Om_t}.$$

4. Puisque  $S$  est inversible et que  $S^{-1} = \frac{1}{9}S$ , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = SX(t) \iff X(t) = \frac{1}{9}SU(t).$$

On obtient donc comme unique solution du système différentiel (SD) vérifiant les conditions initiales (CI) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = 3 \begin{pmatrix} e^{-9t} + 2e^{9t} \\ 2e^{-9t} - 2e^{9t} \\ 2e^{-9t} + e^{9t} \end{pmatrix},$$

soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = 3e^{-9t} + 6e^{9t} \\ y(t) = 6e^{-9t} - 6e^{9t} \\ z(t) = 6e^{-9t} + 3e^{9t}. \end{cases}$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On note  $M_t$  le point de coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  dans le repère  $\mathcal{R}$ ; on en déduit que le vecteur  $\overrightarrow{OM_t}$  a pour coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Notons alors  $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$  les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OM_t}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , et notons  $X_2(t)$  la matrice colonne :

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}.$$

On a alors, par la formule de changement de base :

$$X(t) = SX_2(t),$$

puis, comme  $S$  est inversible et que  $S^{-1} = \frac{1}{9}S$ , on obtient :

$$X_2(t) = \frac{1}{9}SX(t) = \frac{1}{9}U(t),$$

ce qui montre que le vecteur  $\overrightarrow{OM_t}$  est l'image du vecteur  $\overrightarrow{Om_t}$  par l'homothétie de rapport  $\frac{1}{9}$ , ou encore que le point  $M_t$  est l'image du point  $m_t$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{9}$ .

On en déduit en particulier que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les vecteurs  $\overrightarrow{OM_t}$  et  $\overrightarrow{Om_t}$  sont colinéaires, donc que tout vecteur orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre. Ceci montre qu'on peut choisir  $\vec{N} = \vec{n} = \vec{k}$ , et qu'on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{N} \perp \overrightarrow{OM_t}.$$

5. La propriété précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{N} \perp \overrightarrow{OM_t}$$

équivalent, en termes de produit scalaire, à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM_t} \cdot \vec{N} = 0.$$

En traduisant cette égalité à l'aide des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ , on obtient que :

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le point  $M_t$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x + y - 2z = 0$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

6. On se place dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (notons au passage que c'est un repère du plan  $\mathcal{P}$  défini à la question 5), et on s'intéresse, dans ce repère, à la courbe de représentation paramétrique  $(u(t), v(t))$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , que l'on appelle  $\mathcal{C}$ .

On remarque d'abord que :  $\forall t \in \mathbb{R}, u(t)v(t) = 27^2$ , et que les fonctions  $u$  et  $v$  sont toujours strictement positives, ce qui montre que  $\mathcal{C}$  est incluse dans la branche située dans le quadrant  $\{x > 0, y > 0\}$  de l'hyperbole d'équation cartésienne  $xy = 27^2$ .

Réciproquement, soient  $(x, y)$  les coordonnées d'un point de la branche située dans le quadrant  $\{x > 0, y > 0\}$  de l'hyperbole d'équation cartésienne  $xy = 27^2$ . Alors en posant  $t = -\frac{1}{9} \ln\left(\frac{x}{27}\right)$ , on a :

$$x = 27e^{-9t} = u(t) \quad \text{et} \quad y = \frac{27^2}{x} = 27e^{9t} = v(t).$$

Ceci montre que :

$\mathcal{C}$  est la branche située dans le quadrant  $\{x > 0, y > 0\}$  de l'hyperbole d'équation cartésienne  $xy = 27^2$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  est la courbe que décrit le point  $m_t$  lorsque  $t \in \mathbb{R}$ . Par ailleurs, la courbe  $\mathcal{H}$  est la courbe décrite par le point  $M_t$  lorsque  $t \in \mathbb{R}$ . Or on a vu à la question 3 que le point  $M_t$  est l'image du point  $m_t$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{9}$ . On en déduit donc que la courbe  $\mathcal{H}$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{9}$ , ou autrement dit que :

la courbe  $\mathcal{C}$  est l'image de la courbe  $\mathcal{H}$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 9.

Remarque : on obtient donc une représentation paramétrique de la courbe  $\mathcal{H}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_2(t) = 3e^{-9t} \\ y_2(t) = 3e^{9t}, \end{cases}$$

ce qui montre que  $\mathcal{H}$  est aussi une branche d'hyperbole : la branche située dans le quadrant  $\{x > 0, y > 0\}$  de l'hyperbole d'équation cartésienne  $xy = 9$ .



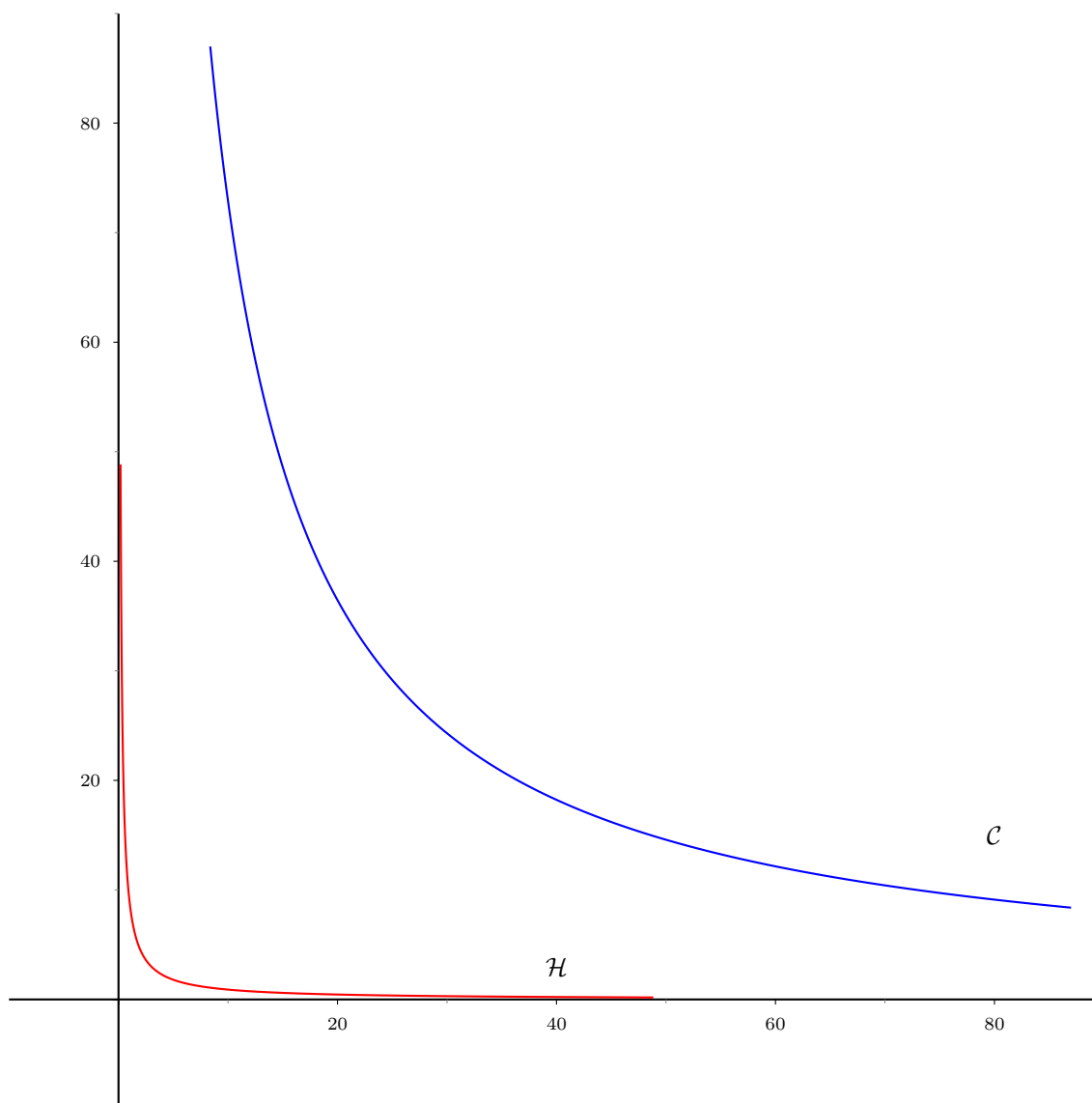


FIGURE 3 – Courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}$  dans le plan  $\mathcal{P}$

### Exercice 3

1. (a) La fonction  $v \mapsto \cos v$  est continue et ne s'annule pas sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , donc la fonction  $v \mapsto \frac{1}{\cos v}$  est continue sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  comme l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Pour tout  $x \in ]-\pi; \pi[$ , on a  $[0, \frac{x}{2}] \subset ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et donc  $v \mapsto \frac{1}{\cos v}$  est continue sur  $[0, \frac{x}{2}]$ . Elle admet donc une primitive notée  $P$ . L'intégrale définissant  $f(x)$  est donc bien définie pour tout  $x \in ]-\pi; \pi[$  et

$$\forall x \in ]-\pi; \pi[, \quad f(x) = \left[ P(v) \right]_0^{x/2} = P\left(\frac{x}{2}\right) - P(0).$$

Or  $P$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , donc  $f$  est dérivable comme composée sur  $]-\pi; \pi[$  et

$$\boxed{\forall x \in ]-\pi; \pi[, \quad f'(x) = \frac{1}{2} P'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos(x/2)}}.$$

La fonction  $f$  est définie sur  $]-\pi; \pi[$  qui est symétrique par rapport à 0. Soit  $x \in ]-\pi; \pi[$ . Par le changement de variable  $u = -v$  et en utilisant la parité de la fonction  $\cos$ , on a

$$\forall x \in ]-\pi; \pi[, \quad f(-x) = \int_0^{-x/2} \frac{dv}{\cos v} = \int_0^{x/2} \frac{-du}{\cos(-u)} = - \int_0^{x/2} \frac{du}{\cos(u)} = -f(x)$$

La fonction  $f$  est donc impaire.

Pour étudier les variations de  $f$  sur  $] -\pi, \pi[$  il suffit donc d'étudier ses variations sur  $[0, \pi[$ . Or si  $x \in [0, \pi[$ , alors  $x/2 \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $\cos(x/2) > 0$  donc  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0, \pi[$ . Comme  $f$  est impaire, on en déduit que

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -\pi; \pi[$ .

(b) On sait qu'au voisinage de 0,  $\sin u \sim u$  donc

Au voisinage de 0,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \sim u$ .

Soit  $x \in [0, \pi[$ . Dans l'intégrale définissant  $f(x)$ , on effectue le changement de variables  $v = \frac{\pi}{2} - u$  : on a  $dv = -du$ , la borne  $v = 0$  devient  $u = \frac{\pi}{2}$  et la borne  $v = \frac{\pi}{2}$  devient  $u = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ . On obtient donc

$$f(x) = \int_0^{x/2} \frac{dv}{\cos(v)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}} \frac{-du}{\cos(\pi/2 - u)} = \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin u}.$$

Or sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , les fonctions  $u \mapsto \frac{1}{\sin u}$  et  $u \mapsto \frac{1}{u}$  sont continues et strictement positives et elles sont équivalentes au voisinage de 0. Les deux intégrales généralisées  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u}$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin u}$  sont donc de même nature.

Or la première est divergente car  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u} du = +\infty$  (intégrale de Riemann) donc l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin u} du$  est divergente et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin u} du = +\infty$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0^+$ , on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin u} = +\infty.$$

De plus  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, \pi[$  donc par le théorème de la bijection continue,  $f$  est une bijection de  $[0; \pi[$  sur  $[f(0); \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)[ = [0; +\infty[$ . Comme de plus  $f$  est impaire, on en conclut que

$f$  est une bijection de  $] -\pi; \pi[$  dans  $\mathbb{R}$ .

2. (a)  $f$  est une bijection de  $] -\pi, \pi[$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $] -\pi; \pi[$  et pour tout  $x \in ] -\pi; \pi[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2 \cos(x/2)} \neq 0$  car le cosinus ne s'annule pas sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .  
Sa réciproque  $g$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\frac{1}{2 \cos(g(y)/2)}} \quad \text{donc} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) = 2 \cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$$

Comme  $g$  et la fonction cosinus sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ ,  $g'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g''(y) = -g'(y) \sin\left(\frac{g(y)}{2}\right) = -2 \cos\left(\frac{g(y)}{2}\right) \sin\left(\frac{g(y)}{2}\right) = -\sin(g(y)).$$

(b) D'après la question précédente, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$g''(t) + \sin(g(t)) = 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0 \text{ car } f(0) = 0, \quad \text{et} \quad g'(0) = 2 \cos(0) = 2 > 0$$

Donc

$$t \mapsto g(t) \text{ est solution de } X''(t) + \sin(X(t)) = 0 \quad \text{avec } t \geq 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = 2.$$

3. La décomposition en éléments simples de  $\frac{2}{1-u^2}$  est  $\frac{2}{1-u^2} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}$ , donc pour tout  $t \in ]-1; 1[$ ,

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \frac{2}{1-u^2} du \\ &= \int_0^t \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} du \\ &= \left[ -\ln|1-u| + \ln|1+u| \right]_0^t \\ &= -\ln|1-t| + \ln|1+t|. \end{aligned}$$

Or  $t \in ]-1; 1[$  donc  $1+t > 0$  et  $1-t > 0$  donc

$$\forall t \in ]-1; 1[, \quad h(t) = \int_0^t \frac{2 \, du}{1-u^2} = \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right).$$

4. (a) Soit  $x \in ]-\pi; \pi[$ . On pose  $u = \tan\left(\frac{v}{2}\right)$ . Comme dans l'intégrale définissant  $f(x)$ ,  $v \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  on a  $v/2 \in ]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$  et donc

$$\arctan u = \arctan \left( \tan \left( \frac{v}{2} \right) \right) = \frac{v}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{v = 2 \arctan u} \quad \text{et} \quad \boxed{dv = \frac{2}{1+u^2} \, du}.$$

(b)

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2(v/2)}{1+\tan^2(v/2)} = \frac{\cos^2(v/2) - \sin^2(v/2)}{\cos^2(v/2) + \sin^2(v/2)} = \frac{2\cos^2(v/2) - 1}{1} = \cos(v).$$

- (c) Soit  $x \in ]-\pi; \pi[$ . Dans l'intégrale définissant  $f(x)$ , on effectue le changement de variables  $u = \tan(v/2)$  : la borne  $v = 0$  devient  $u = \tan(0) = 0$  et la borne  $v = x/2$  devient  $u = \tan(x/4)$  et avec les questions précédentes, on a

$$f(x) = \int_0^{\tan(x/4)} \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} \, du = \int_0^{\tan(x/4)} \frac{2}{1-u^2} \, du = h(\tan(x/4)),$$

et donc

$$\forall x \in ]-\pi; \pi[, \quad f(x) = \ln \left( \frac{1 + \tan(x/4)}{1 - \tan(x/4)} \right).$$

#### Exercice 4

1. Le point  $M$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon 1, et  $\theta$  est une mesure de l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ; on en déduit que  $\boxed{\text{les coordonnées de } M \text{ sont : } (\cos(\theta), \sin(\theta))}$ .

Le point  $M'$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(OA)$ ; il a donc la même abscisse que  $M$ , et 0 pour ordonnée;  $\boxed{\text{les coordonnées de } M' \text{ sont donc : } (\cos(\theta), 0)}$ .

Le point  $O'$  est le milieu du segment  $[AM]$ :  $\boxed{O' \text{ a donc pour coordonnées } \left( \frac{1 + \cos(\theta)}{2}, \frac{\sin(\theta)}{2} \right)}$ .

2. Soit  $\theta \in [0; \pi[$ . On note  $(x(\theta), y(\theta))$  les coordonnées du point  $H$ . Le point  $H$  appartient à la droite  $(MM')$ , il a donc la même abscisse que  $M$  et  $M'$ , ce qui donne :  $x(\theta) = \cos(\theta)$ .

Pour trouver son ordonnée, on se place dans le triangle  $OHM'$  qui est rectangle en  $H$ .

On a :  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{HM'}{OM'}$ , ce qui donne :

$$HM' = y(\theta) = \cos(\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\text{les coordonnées de } H \text{ sont } (x(\theta), y(\theta)) = \left( \cos(\theta), \cos(\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)}.$$

3. On a défini deux fonctions :  $x: [0; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y: [0; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $\theta \mapsto \cos(\theta)$  et  $\theta \mapsto \cos(\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

Ces deux fonctions sont dérivables sur l'intervalle  $[0; \pi[$ , puisque la fonction  $\cos$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc en particulier sur  $[0; \pi[$ , et la fonction  $\tan$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ , donc en particulier sur  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[$ .

On a :

$$\boxed{\forall \theta \in [0; \pi[, \quad x'(\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{et} \quad y'(\theta) = -\sin(\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos(\theta) \times \frac{1}{2} \left( 1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)}.$$

4. En utilisant les formules d'angle moitié rappelées dans l'énoncé, et valables lorsque  $\theta \in [0 ; \pi[$ , en posant  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , on a :

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= -\frac{2t}{1+t^2} \times t + \frac{1-t^2}{1+t^2} \times \frac{1}{2}(1+t^2) \\ &= \frac{-4t^2 + (1-t^2)(1+t^2)}{2(1+t^2)} \\ &= \frac{-4t^2 + 1 - t^4}{2(1+t^2)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut calculer l'expression  $\cos(\theta) - \frac{1}{1+\cos(\theta)}$  :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) - \frac{1}{1+\cos(\theta)} &= \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1}{\frac{2}{1+t^2}} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1+t^2}{2} \\ &= \frac{2(1-t^2) - (1+t^2)^2}{2(1+t^2)} \\ &= \frac{-4t^2 + 1 - t^4}{2(1+t^2)}. \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\boxed{\forall \theta \in [0 ; \pi[, \quad y'(\theta) = \cos(\theta) - \frac{1}{1+\cos(\theta)} .}$$

En écrivant cette expression sous la forme d'un seul quotient, on a :

$$\forall \theta \in [0 ; \pi[, \quad y'(\theta) = \frac{\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1}{1+\cos(\theta)} .$$

Le trinôme du second degré  $x^2 + x - 1$  a comme racines  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . On connaît donc le signe de ce trinôme :

$$x^2 + x - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} .$$

On en déduit que :

$$\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq \cos(\theta) \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} .$$

Comme  $1 \leq \sqrt{5} \leq 3$ , on a :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq -1 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq 1 .$$

On note  $\theta_0$  l'unique réel de l'intervalle  $[0 ; \pi[$  tel que  $\cos(\theta_0) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  (ceci découle du fait que la fonction  $\cos$  est une bijection de  $[0 ; \pi[$  sur  $] -1 ; 1[$ ).

Comme de plus la fonction  $\cos$  prend ses valeurs entre  $-1$  et  $1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1 \leq 0 &\Longleftrightarrow -1 \leq \cos(\theta) \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &\Longleftrightarrow \theta_0 \leq \theta < \pi . \end{aligned}$$

Pour terminer, remarquons que le dénominateur de  $y'$  est strictement positif sur  $[0 ; \pi[$  puisque :

$$\forall \theta \in [0 ; \pi[, \quad \cos(\theta) > -1 .$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall \theta \in [0 ; \theta_0[, \quad y'(\theta) > 0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [\theta_0 ; \pi[, \quad y'(\theta) \leq 0 .}$$

5. Puisque la fonction  $\sin$  est positive sur  $[0 ; \pi[$ , on a :

$$\forall \theta \in [0 ; \pi[, \quad x'(\theta) \leq 0 .$$

On peut donc construire le tableau de variation conjoint des fonctions  $x$  et  $y$  :

| $\theta$     | 0             | $\theta_0$       | $\pi$     |
|--------------|---------------|------------------|-----------|
| $x'(\theta)$ | 0             | —                | 0         |
| $x$          | 1             | $\cos(\theta_0)$ | -1        |
| $y$          | 0             | $y(\theta_0)$    | $-\infty$ |
| $y'(\theta)$ | $\frac{1}{2}$ | +                | 0         |
|              |               | —                | $-\infty$ |

6. Lorsque  $\theta$  tend vers  $\pi$ , l'abscisse  $x(\theta)$  de  $H$  tend vers  $-1$  et son ordonnée  $y(\theta)$  tend vers  $-\infty$ ; ceci montre que la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote à la courbe  $\Gamma$ .

7. Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on calcule :

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 ; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 ; \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 .$$

En  $\theta = \theta_0$ , on a  $\cos(\theta_0) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = x(\theta_0)$ .

Comme :  $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \iff t^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$  où  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , on obtient, pour  $\theta = \theta_0$ ,

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \times \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5} - 2, \end{aligned}$$

d'où  $t = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$  car  $\theta_0 \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ . On a alors :

$$\begin{cases} x(\theta_0) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y(\theta_0) = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On obtient le tracé suivant : voir figure 4.

8. Soit  $\theta \in [0 ; \pi[$ . On pose, comme à la question 4,  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . On a alors :

$$(x(\theta))^2 + (y(\theta))^2 = \cos^2(\theta) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 \times (1 + t^2) = \frac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2},$$

et :

$$(x(\theta))^2 - (y(\theta))^2 = \cos^2(\theta) \left(1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{(1 - t^2)^3}{(1 + t^2)^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \times \frac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2},$$

ce qui montre que :

$$\forall \theta \in [0 ; \pi[, \quad (x(\theta))^2 - (y(\theta))^2 = x(\theta) \times \left[(x(\theta))^2 + (y(\theta))^2\right],$$

autrement dit que :

$$\boxed{\text{les coordonnées } (x, y) \text{ des points de la courbe } \Gamma \text{ vérifient l'équation : } x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2.}$$

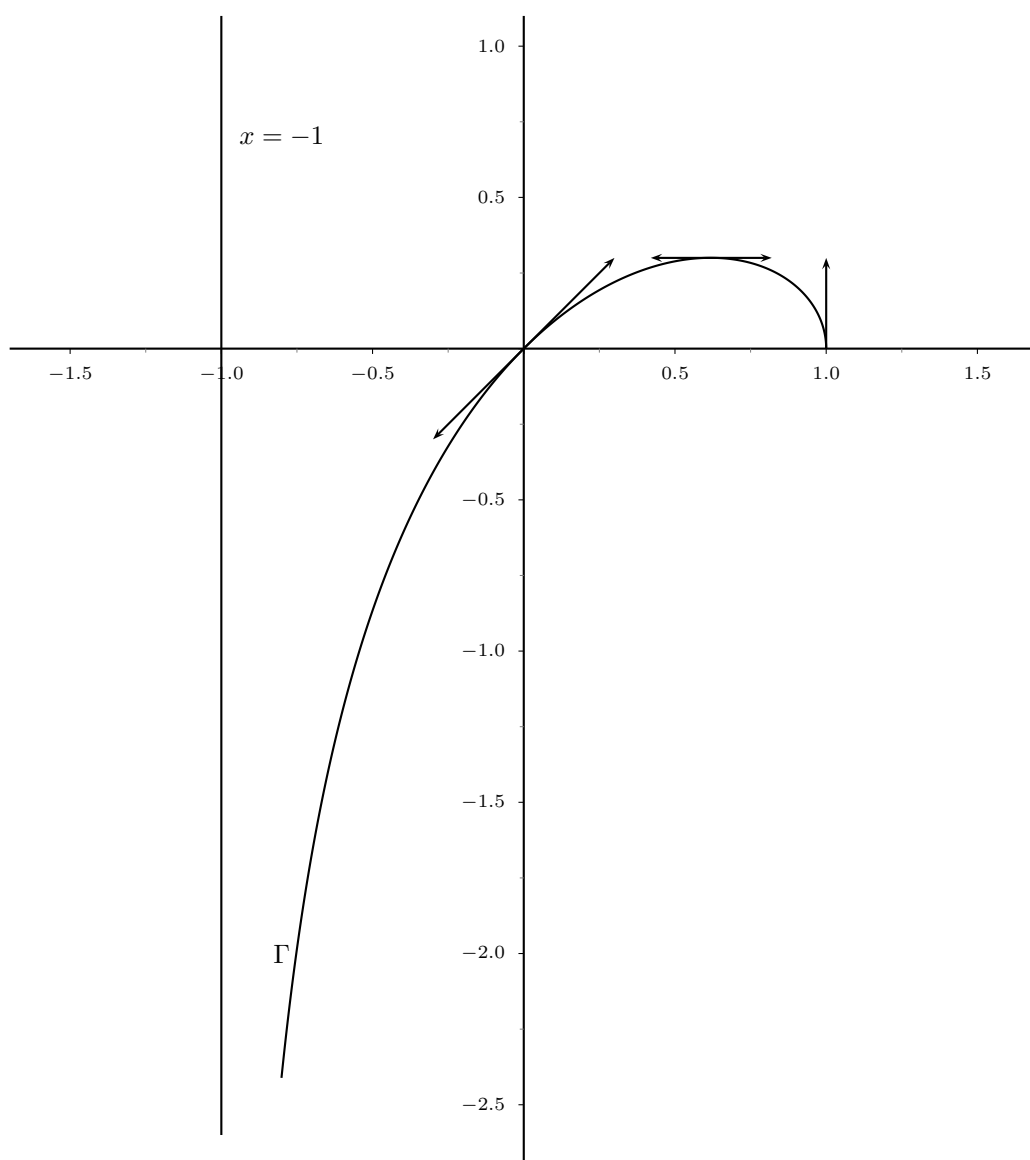


FIGURE 4 – Courbe  $\Gamma$