
Corrigé

Exercice 1

1. Le calcul de I_0 s'effectue directement :

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta = 1 .$$

Pour calculer I_1 , on utilise la formule de trigonométrie suivante : $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$. On obtient :

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^\pi = \frac{1}{2} .$$

2. Soit k un entier strictement positif.

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin^{2(k-1)}(\theta) - \sin^{2k}(\theta)) d\theta .$$

En factorisant par $\sin^{2k-2}(\theta)$ on obtient :

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2k-2}(\theta) (1 - \sin^2(\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2k-2}(\theta) \cos^2(\theta) d\theta = J_{k-1} .$$

3. L'intégrale J_{k-1} s'écrit :

$$J_{k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2k-2}(\theta) \cos^2(\theta) d\theta .$$

Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(\theta) = \frac{1}{2k-1} \sin^{2k-1}(\theta) \quad \text{et} \quad v(\theta) = \cos(\theta) .$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; leurs dérivées respectives sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u'(\theta) = \cos(\theta) \sin^{2k-2}(\theta) \quad \text{et} \quad v'(\theta) = -\sin(\theta) .$$

Le théorème d'intégration par parties s'applique et nous permet donc d'écrire :

$$J_{k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u'(\theta)v(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} [u(\theta)v(\theta)]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(\theta)v'(\theta) d\theta .$$

La fonction u s'annule en 0 et en π , donc le crochet vaut 0, et on obtient :

$$J_{k-1} = \frac{1}{\pi(2k-1)} \int_0^\pi \sin^{2k-1}(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi(2k-1)} \int_0^\pi \sin^{2k}(\theta) d\theta = \frac{1}{2k-1} I_k .$$

En réinjectant cette expression de J_{k-1} dans la relation obtenue à la question 2, on obtient :

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{2k-1} I_k ,$$

ce qui donne :

$$I_{k-1} = \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) I_k ,$$

puis la relation (R) cherchée :

$$I_k = \frac{2k-1}{2k} I_{k-1} .$$

4. Soit $\mathcal{P}_k$ la proposition : $I_k = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$. On va démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

- Initialisation : ici $k = 1$. D'après la question 1, $I_1 = \frac{1}{2}$. Par ailleurs $2! = 2$ et $1! = 1$ donc $\frac{2!}{4 \times (1!)^2} = \frac{1}{2}$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Hérité : soit k un entier strictement positif fixé. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$I_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}.$$

On commence par exprimer I_{k+1} en fonction de I_k grâce à la relation de récurrence (R) :

$$I_{k+1} = \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} I_k = \frac{2k+1}{2k+2} I_k.$$

Puis on utilise l'hypothèse de récurrence, qui donne I_k en fonction de k :

$$I_k = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}.$$

On obtient donc :

$$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} \times \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}.$$

En multipliant haut et bas par $2k+2$ on obtient :

$$I_{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(2(k+1))24^k(k!)^2} = \frac{(2k+2)!}{4(k+1)24^k(k!)^2} = \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}.$$

- Conclusion : pour tout entier k strictement positif, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

5. Soit n un entier strictement positif. La relation (R) s'écrit : $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$. En prenant le logarithme népérien de cette égalité, on obtient :

$$\ln(I_n) = \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \ln(I_{n-1}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + u_{n-1}.$$

Par une récurrence immédiate on obtient :

$$u_n = u_0 + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right);$$

or $u_0 = \ln(I_0) = \ln(1) = 0$ d'après le résultat obtenu à la question 1. D'où :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

6. (a) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \ln(1+x) - x$. Elle est définie sur $] -1; +\infty[$, et elle est continue et dérivable sur cet intervalle. On a :

$$\forall x > -1, \quad h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Sur $] -1; 0[$, $1+x > 0$ et $-x > 0$, donc $h'(x) > 0$, ce qui montre que h est strictement croissante sur $] -1; 0[$.

De plus $h(0) = 0$. On en déduit que :

$$\forall x \in] -1; 0[, \quad h(x) < 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln(1+x) < x.$$

- (b) Soit k un entier strictement positif. Alors $\frac{-1}{2k} < 0$ et $\frac{-1}{2k} > -1$ (car $2k > 1$). Ainsi grâce à la question précédente, on peut écrire :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) < \frac{-1}{2k} < 0.$$

(c) Des questions 5 et 6(b), on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2k}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2k} = -\infty$ car la série de terme général $\frac{-1}{2k}$ est de type Riemann divergente. D'où :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. Enfin, $I_n = e^{u_n}$, ce qui implique que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

7. On calcule $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_n(x, \theta) d\theta$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_n(x, \theta) d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \sin(\theta))^{2k} d\theta \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \underbrace{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(\theta))^{2k} d\theta \right)}_{I_k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \\ &= g_n(x). \end{aligned}$$

8. Soit x un réel fixé. On étudie la convergence absolue de la série (numérique) de terme général $\alpha_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}$. Pour cela on calcule le rapport $\left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right|$:

$$\left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = \frac{(k!)^2}{((k+1)!)^2} \frac{4^k}{4^{k+1}} \frac{x^{2(k+1)}}{x^{2k}} = \frac{x^2}{4(k+1)^2}.$$

La limite, lorsque k tend vers $+\infty$, de $\left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right|$, vaut 0, donc, d'après le critère de D'Alembert pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $|\alpha_k|$ est convergente. Ceci étant valable quel que soit le réel x , on en conclut que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

9. (a) Le développement en série entière de la fonction cosinus est le suivant :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Son rayon de convergence vaut $+\infty$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le développement en série entière du cosinus donné à la question 9(a), on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise alors le résultat de la question 7 pour écrire :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - g_n(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta \right| \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right| \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} (\sin(\theta))^{2k} \right) d\theta .
\end{aligned}$$

Or $\sin(\theta)^2$ est un réel compris entre 0 et 1, et $k > n$, ce qui implique que : $(\sin(\theta)^2)^k \leq (\sin(\theta)^2)^n$.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - g_n(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} (\sin(\theta))^{2n} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \right)}_{R_n(x)} (\sin(\theta))^{2n} d\theta \\
&= R_n(x) \times \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(\theta))^{2n} d\theta .
\end{aligned}$$

10. (a) Le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique est le suivant :

$$\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} .$$

Son rayon de convergence vaut $+\infty$.

(b) Soit x un réel. La série de terme général $\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ est à termes positifs. Elle est convergente ; sa somme vaut $\text{ch}(x)$ et $R_n(x)$ est son reste d'indice n ; on peut donc en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n(x) \leq \text{ch}(x) .$$

Par ailleurs, $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(\theta))^{2n} d\theta = I_n$, donc le résultat de la question 9 se réécrit :

$$|\varphi(x) - g_n(x)| \leq R_n(x) \times I_n \leq \text{ch}(x) \times I_n .$$

11. D'après la question 6(c), la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, donc le théorème des gendarmes implique que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(x) - g_n(x)| = 0 ,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \varphi(x) ;$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x)$. On en conclut, par unicité de la limite, que :

$$g(x) = \varphi(x) .$$

Exercice 2 Soit a et p deux réels positifs, avec $p > 0$.

1. Soit M un réel strictement positif. Alors :

$$\int_0^M e^{-px} \sin(ax) dx = \operatorname{Im} \left(\int_0^M e^{-px} e^{iax} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\int_0^M e^{(ia-p)x} dx \right).$$

Comme $p > 0$, le complexe $ia - p$ n'est pas nul, et :

$$\int_0^M e^{(ia-p)x} dx = \left[\frac{1}{ia-p} e^{(ia-p)x} \right]_0^M = \frac{1}{ia-p} e^{(ia-p)M} - \frac{1}{ia-p}.$$

Déterminons la partie imaginaire de ce complexe. On a d'abord : $\frac{1}{ia-p} = \frac{-p-ia}{a^2+p^2}$, ce qui montre que :

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{ia-p} \right) = -\frac{a}{a^2+p^2}.$$

Ensuite : $e^{(ia-p)M} = e^{-pM} e^{iaM} = e^{-pM} (\cos(aM) + i \sin(aM))$, d'où :

$$\operatorname{Im} \left(\int_0^M e^{(ia-p)x} dx \right) = -\frac{p}{a^2+p^2} \times \sin(aM) e^{-pM} - \frac{a}{a^2+p^2} \cos(aM) e^{-pM} + \frac{a}{a^2+p^2}.$$

Enfin, $\lim_{M \rightarrow +\infty} \cos(aM) e^{-pM} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sin(aM) e^{-pM} = 0$ car ce sont des produits d'une fonction bornée par une exponentielle qui tend vers 0 (car $p > 0$).

Ceci démontre que :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-px} \sin(ax) dx = \frac{a}{a^2+p^2}.$$

Donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin(ax) dx$ est convergente et vaut :

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin(ax) dx = \frac{a}{a^2+p^2}.$$

2. On définit $F(p)$ par :

$$F(p) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\sin^2(\theta) + p^2} d\theta.$$

(a) On pose $t = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$. La fonction cosinus est de classe $\mathcal{C}^1$ et est une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}]$ sur $[0; 1]$;

on en déduit que la fonction $\theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}]$ sur

$\left[0; \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right]$. Cela justifie le changement de variable. On obtient :

$$dt = -\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1+p^2}} d\theta,$$

et $t^2 = \frac{\cos^2(\theta)}{1+p^2}$, ce qui implique que : $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - t^2(1+p^2)$. Alors :

$$F(p) = \int_{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}}^0 \frac{-\sqrt{1+p^2}}{1 - t^2(1+p^2) + p^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \frac{\sqrt{1+p^2}}{(1-t^2)(1+p^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc :

$$G(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad a = 0 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

- (b) La fraction rationnelle $\frac{1}{1-X^2}$ a deux pôles simples, -1 et 1 . Sa décomposition en éléments simples est donc de la forme :

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{A}{1-X} + \frac{B}{1+X},$$

où A et B sont des réels. En procédant (par exemple) par identification, on trouve : $A = B = \frac{1}{2}$. On obtient donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}.$$

- (c) Le réel $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ est strictement compris entre 0 et 1. Donc sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right]$, les fonctions $t \mapsto 1-t$ et $t \mapsto 1+t$ sont strictement positives. On peut donc leur choisir, comme primitives respectives, les fonctions $t \mapsto -\ln(1-t)$ et $t \mapsto \ln(1+t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} [-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1+p^2} + 1}{\sqrt{1+p^2} - 1} \right). \end{aligned}$$

Exercice 3

1. (a) Soit P_A le polynôme caractéristique de la matrice A . Soit I_3 la matrice identité de taille 3. Par définition, on a :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ -1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$P_A(X) = (1-X)(X^2 - 3X + 3) - (1-X) = (1-X)(X^2 - 3X + 2) = -(X-1)^2(X-2).$$

- (b) Le polynôme P_A admet comme racines : 1 (double) et 2 (simple). Or les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique ; on a donc démontré que f admet deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = 2 \text{ (d'ordre de multiplicité 1)} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 \text{ (d'ordre de multiplicité 2)}.$$

2. On note $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$. Soit $\vec{u}_1$ un vecteur de $\mathcal{U}_{\lambda_1}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a donc, par définition, $f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1$, ce qui s'écrit matriciellement :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 + z_1 &= 2x_1 \\ y_1 + z_1 &= 2y_1 \\ -x_1 + y_1 + z_1 &= 2z_1 \end{cases},$$

qui lui-même équivaut à :

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ y_1 &= z_1 \end{cases}.$$

On en déduit que le vecteur $\vec{u}_1$ appartient à $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ si et seulement si ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc une base de $\mathcal{U}_{\lambda_1}$. On a donc :

$$\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}.$$

On procède de même pour $\mathcal{U}_{\lambda_2}$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$. Soit $\vec{u}_2$ un vecteur de $\mathcal{U}_{\lambda_2}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a donc, par définition, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_2$, ce qui s'écrit matriciellement :

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} 2x_2 - y_2 + z_2 &= x_2 \\ y_2 + z_2 &= y_2 \\ -x_2 + y_2 + z_1 &= z_2 \end{cases},$$

qui lui-même équivaut à :

$$\begin{cases} x_2 &= y_2 \\ z_2 &= 0 \end{cases}.$$

On en déduit que le vecteur $\vec{u}_2$ appartient à $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ si et seulement si ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc une base de $\mathcal{U}_{\lambda_2}$. On a donc :

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}.$$

3. Dans la question 1(b), nous avons vu que la valeur propre $\lambda_2 = 1$ est double ; et dans la question 2, nous avons vu que le sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ associé était de dimension 1. D'après le théorème de cours de diagonalisabilité d'une matrice, ceci implique que la matrice A n'est pas diagonalisable.
4. (a) Considérons la famille de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$. Pour montrer que c'est une base de E , nous allons montrer que la matrice P de cette famille de vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est inversible. Comme on connaît les coordonnées des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on peut écrire :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de P se calcule par exemple en développant par rapport à la première ligne. On trouve : $\det(P) = -1 \neq 0$, ce qui montre que P est inversible. On en déduit que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base de E .

- (b) D'après les définitions respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$f(\vec{u}) = 2\vec{u} = 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{v}) = \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}.$$

Par ailleurs, A est la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donc les coordonnées de $f(\vec{k})$ se lisent dans la dernière colonne de A , elles valent $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

(c) Toujours d'après les définitions respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = \vec{v}$. Et d'après la question précédente, on a : $f(\vec{k}) = \underbrace{\vec{i} + \vec{j}}_{\vec{v}} + \vec{k} = \vec{v} + \vec{k}$.

(d) La matrice B de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ contient, dans la première colonne, les coordonnées du vecteur $f(\vec{u})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$. Comme $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$, la première colonne sera $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans la deuxième colonne, on écrit les coordonnées du vecteur $f(\vec{v})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$. Comme $f(\vec{v}) = \vec{v}$, la deuxième colonne sera $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin, dans la troisième colonne, on écrit les coordonnées du vecteur $f(\vec{k})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$. Comme $f(\vec{k}) = \vec{v} + \vec{k}$, la troisième colonne sera $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Les calculs de B^2 et B^3 donnent :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au vu de ces matrices, on peut conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrons-le par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Initialisation : ici $n = 1$. La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie par définition de B .
- Hérité : soit n un entier strictement positif fixé. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que : $B^{n+1} = B^n \times B$. On utilise la définition de B et l'expression de B^n donnée par l'hypothèse de récurrence pour effectuer ce produit. On obtient :

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Conclusion : pour tout entier n strictement positif, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
6. La matrice de passage P de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est la matrice de la famille de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; c'est donc la matrice qu'on a définie dans la question 4(a) :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de P^{-1} (par exemple en "renversant" le système $PX = Y$, où X et Y sont des vecteurs colonnes quelconques de E) donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. La matrice B est triangulaire supérieure donc son déterminant est donné par le produit de ses termes diagonaux. On obtient : $\det(B) = 2 \neq 0$, ce qui montre que B est inversible. Le calcul de B^{-1} (par exemple en "renversant" le système $BX = Y$, où X et Y sont des vecteurs colonnes quelconques de E) donne :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule $B^{-2} = (B^{-1})^2$ et $B^{-3} = (B^{-1})^3$:

$$B^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors émettre la conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^{-n} = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat se démontre par une récurrence du même type que celle de la question 5, puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B^{-(n+1)} = B^{-n} \times B^{-1}$. On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A et la matrice B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes; ces deux matrices sont donc semblables, et plus précisément :

$$A = PBP^{-1}.$$

On en déduit alors que :

$$A^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1},$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A^n = PB^nP^{-1}.$$

Le calcul donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n+1-2^n & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Les deux fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques, donc x et y sont aussi 2π -périodiques. On en déduit que pour tout réel t , le point $M(t + 2\pi)$ sera confondu avec le point $M(t)$. Il suffit donc d'étudier les fonctions x et y sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi ; \pi]$ pour obtenir l'étude de la courbe en entier.
2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction cosinus est paire, on a : $\cos(-t) = \cos(t)$, et comme la fonction sinus est impaire, on a : $\sin(-t) = -\sin(t)$. On en déduit donc que :

$$x(-t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t) .$$

Le point $M(-t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. Ceci étant vrai pour tout réel t , on en déduit que la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

- (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, donc on en déduit que :

$$x(\pi - t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = y(t) .$$

Le point $M(\pi - t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées. Ceci étant vrai pour tout réel t , on en déduit que la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

- (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$, donc on en déduit que :

$$x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t) \quad \text{et} \quad y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t) .$$

Le point $M(\frac{\pi}{2} - t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ceci étant vrai pour tout réel t , on en déduit que la courbe présente une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Le résultat de la question 2(a) nous permet de réduire l'étude sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ à celle sur $[0 ; \pi]$. Puis le résultat de la question 2(b) nous permet de réduire l'étude sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ à celle sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. Enfin, le résultat de la question 2(c) nous permet de réduire l'étude sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ à celle sur l'intervalle $I = [0 ; \frac{\pi}{4}]$.

Une fois le tracé obtenu pour t appartenant à I , on effectuera d'abord une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, puis une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et enfin une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

4. Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc les fonctions x et y , produits de cosinus et sinus, aussi. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = -\sin^3(t) + 2\cos^2(t)\sin(t) = \sin(t)(2\cos^2(t) - \sin^2(t)) ,$$

et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = \cos^3(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) = \cos(t)(\cos^2(t) - 2\sin^2(t)) ;$$

En utilisant dans les parenthèses la formule $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \sin(t)(3\cos^2(t) - 1) \quad \text{et} \quad y'(t) = \cos(t)(1 - 3\sin^2(t)) .$$

On se place sur l'intervalle $I = [0 ; \frac{\pi}{4}]$. Sur cet intervalle, la fonction cosinus ne s'annule pas, et la fonction sinus ne s'annule qu'en $t = 0$. Par ailleurs l'image de l'intervalle $I = [0 ; \frac{\pi}{4}]$ par la fonction cosinus est l'intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1]$, et l'image de l'intervalle $I = [0 ; \frac{\pi}{4}]$ par la fonction sinus est l'intervalle $[0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Ceci nous permet d'affirmer que l'équation $3\cos^2(t) - 1 = 0$, qui équivaut à l'équation $\cos^2(t) = \frac{1}{3}$, n'a pas de solution dans I , puisque ni $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ni $\sqrt{\frac{1}{3}}$ n'appartiennent à $[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1]$.

En revanche, l'équation $1 - 3\sin^2(t) = 0$, qui équivaut à l'équation $\sin^2(t) = \frac{1}{3}$, admet exactement une solution notée t_0 dans I ; le réel t_0 est l'unique élément de I tel que $\sin(t_0) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

De plus, comme la fonction sinus est strictement croissante sur I , on a :

$$\forall t \in [0; t_0[, \quad \sin(t) < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_0; \frac{\pi}{4}[, \quad \sin(t) > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On en déduit le tableau de variation conjoint des fonctions x et y :

t	0	t_0	$\frac{\pi}{4}$		
$x'(t)$	0	+	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	+	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	1	+	0	-	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. On a : $x(0) = 0 = y(0)$, donc le point $M(0)$ a pour coordonnées $(0, 0)$.

Puis, en t_0 , $\sin(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, donc $\cos^2(t_0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, d'où, puisque $t_0 \in I$, $\cos(t_0) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Alors : $x(t_0) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $y(t_0) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Donc le point $M(t_0)$ a pour coordonnées $(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9})$.

Enfin, en $\frac{\pi}{4}$, on a : $x(\frac{\pi}{4}) = y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Donc le point $M(\frac{\pi}{4})$ a pour coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

Concernant les vecteurs tangents, rappelons le cours : si t est un réel tel que $x'(t)$ et $y'(t)$ ne sont pas tous les deux nuls, alors le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point $M(t)$.

Nous avons : $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, donc le vecteur de coordonnées $(0, 1)$ est tangent à la courbe au point $M(0)$.

De plus, $x'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $y'(t_0) = 0$, donc le vecteur de coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ est tangent à la courbe au point $M(t_0)$.

Enfin, $x'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $y'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, donc le vecteur de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ est tangent à la courbe au point $M(\frac{\pi}{4})$.

6. Voir la figure sur la dernière page.

7. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $M(t) \neq O$, et soit (ρ, θ) un couple de coordonnées polaires de $M(t)$. Cela signifie que :

$$\begin{cases} x(t) = \rho \cos(\theta) \\ y(t) = \rho \sin(\theta) \end{cases}.$$

Alors :

$$\rho^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2 = \cos^2(t) \sin^4(t) + \sin^2(t) \cos^4(t) = \cos^2(t) \sin^2(t) (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = \cos^2(t) \sin^2(t).$$

Par ailleurs, la formule de duplication du sinus donne :

$$\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta).$$

Donc :

$$\sin^2(\theta) = 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) = 4 \frac{x^2(t)}{\rho^2} \frac{y^2(t)}{\rho^2} = \frac{4 \cos^2(t) \sin^4(t) \sin^2(t) \cos^4(t)}{\cos^4(t) \sin^4(t)} = 4 \cos^2(t) \sin^2(t) = 4\rho^2 .$$

8. Comme $\sin(2\theta)$ est toujours compris entre -1 et 1 , on déduit de la question précédente que $4\rho^2 \leq 1$, ce qui implique que $\rho \leq \frac{1}{2}$. On en déduit que la courbe est inscrite dans le disque de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

