

2008

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.*

Exercice 1

Pour b et t strictement positifs, on considère les fonctions F et I définies par :

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx} dx, \text{ et } I(b) = \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx$$

1) a- Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$? Justifier que F et I sont définies sur $\mathbb{R}_*^+$.

b- Montrer que $\forall x \geq 0, |\sin x| \leq x$. En déduire que $|F(t)| \leq \frac{1}{t}$, puis calculer $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$.

2) On admet que F' peut se calculer en dérivant sous l'intégrale et donc que $F'(t) = \int_0^\infty -\sin(x) e^{-tx} dx$ pour $t > 0$. Montrer que $F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$.

En déduire la valeur de $F(t)$ pour $t > 0$, en utilisant la limite trouvée au 1)b

3) a- Donner le développement en série entière de $\frac{\sin(x)}{x}$.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0, \int_0^\infty u^n e^{-u} du = n!$

c- On admet que pour $t > 1$ on peut intégrer terme à terme le développement en série obtenu dans l'intégrale définissant $F(t)$. En déduire que si $t > 1$ on a :

$$F(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)t^{2k+1}}$$

d- Comment retrouver ce résultat à partir de l'expression de $F(t)$ obtenue en 2) ?

4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx$ existe.

On posera alors : $F(0) = \lim_{b \rightarrow \infty} I(b) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$.

5) On admet que F est continue en 0. En déduire la valeur de $F(0)$.

6) Montrer que $|I((n+1)\pi) - I(n\pi)| \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$. En déduire que $\int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge.

Exercice 2

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit P la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 4x$ de représentation paramétrique pour $u \in \mathbb{R}$

$$u \mapsto M(u) = (x(u), y(u)) = (u^2, 2u)$$

1.a. Donner un vecteur directeur $\vec{t}(u)$ de la tangente au point $M(u)$ à la parabole P .

- 1.b. Donner un vecteur directeur $\vec{n}(u)$ de la normale au point $M(u)$ à la parabole P.
- 1.c- Écrire une équation cartésienne de la tangente $T(u)$ au point $M(u)$.
2. On se donne le point $A(a,0)$ de l'axe des abscisses. Donner un vecteur directeur de la droite contenant A et orthogonale à $T(u)$. Calculer les coordonnées de $H(u)$, projection orthogonale de $A(a,0)$ sur $T(u)$. On notera $(X(u), Y(u))$ les coordonnées de $H(u)$. (Ces coordonnées dépendent du paramètre a)
On appelle C_a la courbe de représentation paramétrique $u \mapsto H(u) = (X(u), Y(u))$
3. Montrer que la courbe C_a admet la même asymptote Δ_a (dépendant de a) quand u tend vers $+\infty$ et quand u tend vers $-\infty$, et donner cette asymptote.
4. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que C_a est une droite. Préciser la valeur de a et la droite trouvée.
On choisit maintenant $a=0$, c'est-à-dire que le point A est choisi à l'origine O du repère.
5. Faire une étude et un tableau de variation conjoint de $X(u)$ et de $Y(u)$. En déduire que la courbe C_0 admet une tangente en $H(u)$ ayant un vecteur directeur de composantes $(-2, u(3+u^2))$. Préciser la nature du point $H(0)$.
6. Représenter sur une même figure la parabole P, la courbe C_0 , l'asymptote Δ_0 .

Exercice 3

On pose pour tout couple d'entiers naturels (n, p) : $I_p(n) = \int_0^\pi x^p \cos(2nx) dx$

1. Calculer $I_p(0)$. Montrer que pour $n > 0$, $I_0(n) = 0$, $I_1(n) = 0$, $I_2(n) = \frac{\pi}{2n^2}$.

f est une fonction π -périodique telle que : $\forall x \in [0, \pi[$, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x$

On fait l'hypothèse qu'il existe deux réels α, β tels que le développement en série de

Fourier de f est : $S_f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$

- 2.a) Déterminer les conditions sur α, β telles que $a_0 = \frac{\pi^2}{6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{-1}{n^2}$.

b) Déterminer les valeurs de α, β qui répondent à ces conditions.

c) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

d) Soit $x \in]-\pi, 0[$, on a donc $-x \in]0, \pi[$ et aussi $\pi + x \in]0, \pi[$. Montrer pour les valeurs de α et β trouvées à la question 2.a. $f(-x) = f(\pi + x)$.

e) En déduire que la fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

3. Que peut-on en déduire pour les coefficients b_n .

4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = S_f(x)$, en énonçant le théorème qui le justifie.

5. Déduire du résultat précédent la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Déduire d'un des résultats précédents la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
7. Appliquer le théorème de Parseval et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4

Dans un espace vectoriel E de dimension 3 on considère l'endomorphisme f de matrice

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans E , l'application identique id a pour matrice $\mathbf{I}$.

L'objet de l'exercice est de déterminer toutes les matrices $\mathbf{M}$ telles que $\mathbf{M}^2 = \mathbf{A}$.

1. Montrer que $\ker f$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\ker f$ de la forme : $\vec{u} = \vec{j} + a\vec{k}$ [on calculera a].

2. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$. Déterminer ses racines.

3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre non nulle de $\mathbf{A}$. Montrer qu'il est de dimension 1 et qu'il est engendré par un vecteur de la forme $\vec{v} = \vec{j} + b\vec{k}$ [on calculera b].

4. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable? Expliquer pourquoi.

5.a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{i})$ est une base de E .

b) Déterminer la matrice $\mathbf{B}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer la matrice de passage $\mathbf{P}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse $\mathbf{P}^{-1}$.

d) Donner une relation entre $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{B}$.

Soit $\mathbf{M}$ une matrice telle que $\mathbf{M}^2 = \mathbf{A}$.

On note g l'endomorphisme de matrice $\mathbf{M}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $g \circ g = f$.

6. a) Montrer que l'on a $f \circ g = g \circ f$.

b) Calculer de deux manières $f \circ g(\vec{u})$ et $f \circ g(\vec{v})$. En déduire que $g(\vec{u}) = \vec{0}$ et qu'il existe un réel x tel $g(\vec{v}) = x\vec{v}$.

c) En déduire que l'on a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

d) Déterminer les deux valeurs possibles de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ puis de $\mathbf{M}$.