

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.*

Exercice 1

Rappel: la fonction arctan est une bijection strictement croissante de $] -\infty, +\infty[$ vers $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, sa dérivée vérifie $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$

Soit un entier $k > 0$ fixé et les fonctions f_k , g_k définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_k : x \mapsto \arctan(x + k\pi) \text{ et } g_k(x) = f_k(x) - x.$$

1) Calculer $f_k'(x)$ et montrer que $\forall x > 0, 0 < f_k'(x) \leq \delta_k < 1$ pour une constante δ_k à calculer en fonction de k .

2) Étudier les variations de g_k sur $[0, +\infty[$. En déduire l'existence d'un unique réel

$$\theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ solution de l'équation } \theta_k = f_k(\theta_k).$$

3) On définit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, et $\forall n \geq 1, u_n = f_k(u_{n-1})$.

a- Montrer que $0 \leq \theta_k - u_n \leq \delta_k(\theta_k - u_{n-1})$.

b- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \theta_k$

c- Pour $k=1$, déterminer n pour que $\theta_1 - u_n < 10^{-15}$

4) Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = \frac{\pi}{2}$ (comparer $f_k(0)$ et θ_k).

5) Montrer que $\forall x > 0, \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire que si on pose

$$\tau_k = \frac{\pi}{2} - \theta_k, \text{ alors } \arctan\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right) \leq \tau_k \leq \arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right).$$

6) Donner un équivalent de τ_k lorsque k tend vers $+\infty$ (s'exprimant simplement en fonction de k).

Exercice 2

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes.

Partie I

Soient deux réels p et q . On considère la matrice $\mathbf{N}$ telle que : $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer le polynôme caractéristique $P_{\mathbf{N}}(x)$ de la matrice $\mathbf{N}$.

On rappelle qu'un polynôme $P(x)$ admet une racine x_0 double s'il existe un polynôme

$Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ avec $Q(x_0) \neq 0$.

2) Montrer que si x_0 est une racine double de $P(x)$ alors x_0 est aussi une racine du polynôme dérivé $P'(x)$.

On suppose qu'il existe un réel α racine double du polynôme caractéristique $P_N(x)$.

3) Montrer que nécessairement p et q doivent vérifier la relation (R) $4p^3 = 27q^2$.

4) Déterminer les plus petits entiers positifs p et q qui vérifient (R)

Partie II

Dans cette partie on prends $p=3$ et $q=2$. La matrice $\mathbf{N}$ est donc ici $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le polynôme caractéristique $P_N(x)$ de cette matrice $\mathbf{N}$.

2) Déterminer les racines λ_1 et λ_2 du polynôme $P_N(x)$, λ_1 étant la racine négative.

Préciser leurs multiplicités.

3) Déterminer une base de E_1 , sous-espace propre de $\mathbf{N}$ associé à la valeur propre λ_1 .

4) Déterminer une base de E_2 , sous-espace propre de $\mathbf{N}$ associé à la valeur propre λ_2 .

5) Quelles sont les dimensions des sous espaces propres E_1 et E_2 . La matrice $\mathbf{N}$ est-elle diagonalisable ? (On précisera pourquoi.)

6) On pose $\mathbf{M} = \mathbf{N} + \mathbf{I}$ où $\mathbf{I}$ est la matrice de l'identité.

a) Calculer $\mathbf{P} = \frac{1}{9}\mathbf{M}^2$

b) Calculer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de $\mathbf{P}$.

c) Montrer que $\mathbf{P}$ est la matrice d'une projection.

d) Préciser les sous-espaces images et noyau de la matrice $\mathbf{P}$.

Exercice 3

On rappelle que les fonctions ch , sh sont définies par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ et que } e^{ni\pi} = (-1)^n$$

On considère la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, +\pi[$ par $f(x) = e^x$. Sa série de

Fourier est $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

1) Calculer a_0 . Donner son expression à l'aide de $\text{sh}(\pi)$.

2) Donner une primitive de la fonction $x \mapsto e^{x(1+i n)}$. On pose $d_n = a_n + i b_n$. Calculer les coefficients d_n , a_n , b_n en fonction de a_0 et n .

3) Justifier que la somme de la série $S(x)$ existe pour tout x , et donner sa valeur pour $x \in]-\pi, +\pi[$. Calculer $S(\pi)$ et donner son expression à l'aide de $f(x)$.

4) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en fonction de $\frac{\text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)}$.

5) Appliquer l'identité de Parseval et retrouver ainsi la somme calculée en 4).

Exercice 4

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe $\mathcal{L}$ de

représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \frac{2t^3}{t^4 + 1} \\ y(t) = \frac{2t}{t^4 + 1} \end{cases}$. Les points de cette courbe seront notés

$M(t)$ en prenant t dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec la convention que $M(\infty)$ correspond à la limite de $x(t)$ et $y(t)$ en $+\infty$ ou $-\infty$

- 1) Montrer que la courbe $\mathcal{L}$ admet une symétrie centrale par rapport à O.
- 2) En changeant t en $\frac{1}{t}$ montrer que la courbe $\mathcal{L}$ admet une autre symétrie et qu'ainsi on peut réduire l'étude de la courbe aux t de l'intervalle $[0, 1]$
- 3) Donner le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, 1]$
- 4) Donner sur votre copie le tableau de valeurs ci-dessous rempli en écrivant les résultats sous la forme de fractions écrites le plus simplement possible:

t	0	$1/2$	$1/\sqrt[4]{3}$	1
$x(t)$				
$y(t)$				
$x'(t)$				
$y'(t)$				

- 5) Préciser la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers 0, puis quand t tend vers $+\infty$
- 6) Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{L}$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$. (Choisir la longueur unité assez grande, de l'ordre de 8 à 10 cm). On placera les points $M(0)$, $M(1/2)$, $M(1/\sqrt[4]{3})$, $M(1)$ ainsi que les tangentes en ces points. On donne $\sqrt[4]{3} \approx 1,3$ et $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 0,76$. Sur cette courbe on surlignera la partie correspondant aux valeurs du paramètre sur l'intervalle $[0, 1]$

On considère l'application f du plan privé de l'origine dans le plan qui au point M de

coordonnées (x, y) associe le point N de coordonnées (X, Y) avec :

$$\begin{cases} X = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ Y = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

- 7) Déterminer l'ensemble C des points invariants de cette transformation, c'est à dire les points M du plan tels que $f(M) = M$.
- 8) Donner une représentation paramétrique $(X(t), Y(t))$ de l'image par f de $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \setminus \{O\}$ (La courbe $\mathcal{L}$ privée de l'origine du repère)
- 9) Calculer $X(t) \times Y(t)$ et en déduire la nature de la courbe image.