

2005

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants .

La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

On considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$:

$$(E) \quad x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 1$$

① Déterminer toutes les solutions réelles de l'équation différentielle $u''(x) - u(x) = 0$

② Sur l' intervalle $]0, +\infty[$ on effectue dans (E) le changement de fonction $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$. Que devient cette équation après ce changement?

③ On se propose de montrer que (E) admet une unique solution développable en série entière autour de l'origine, notée y_0 , et de déterminer cette série entière. On pose $y_0(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

a) Déterminer a_0 et a_1

b) Pour $n \geq 2$ donner une relation de récurrence entre a_n et a_{n-2} . [On pensera à factoriser $n^2 + 3n + 2$]

c) En déduire a_n en fonction de n .

④ Déterminer le rayon de convergence de la série entière qui a pour somme y_0 .

⑤ Exprimer y_0 à l'aide de fonctions "classiques". [Indication : on déterminera d'abord l'expression de $x^2 y_0(x) + 1$]

⑥ Dédire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (E)

⑦ Déterminer les solutions de (E) admettant une limite à droite en 0.

Problème 2

Partie 1

Soit h un réel fixé, élément de l'intervalle $]0, \pi]$ et la fonction f paire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = \frac{1}{2h} \text{ si } t \in [0, h] \text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]h, \pi]$$

① Déterminer la série de Fourier de f et montrer qu'elle converge. On note :

$$sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \text{ et déterminer ce développement.}$$

② Calculer $f(0)$. En déduire la valeur de $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{n}$

③ Que vaut $sf(h)$ (justifier ce résultat). En déduire la valeur de $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nh)}{n}$ à l'aide de $sf(h)$.

④ En prenant $h = \frac{\pi}{2}$, déduire de A la valeur $C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

⑤ Trouver, grâce à la formule de Parseval, la valeur $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2}$

⑥ En prenant $h = \frac{\pi}{2}$, déduire de D la valeur $E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, et puis la valeur $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Partie 2

h est maintenant un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction g est paire, de période 2π vérifiant :

$$g(t) = \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{t}{2h}\right) \text{ si } t \in [0, 2h] \text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]2h, \pi]$$

① Déterminer la série de Fourier de g et montrer qu'elle converge. On note :

$$sg(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)) \text{ et déterminer ce développement. [Indication : On exprimera } 1 - \cos(2\theta) \text{ à l'aide de } \sin^2 \theta]$$

② Trouver, grâce à la formule de Parseval, la valeur de $G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nh)}{n^4}$

③ En prenant $h = \frac{\pi}{2}$, déduire de G la valeur de $H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, puis la valeur de $K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Problème 3

$M_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients complexes.

On dit qu'une matrice $\mathbf{K}$ est une matrice scalaire s'il existe un nombre complexe k tel que

$$\mathbf{K} = k\mathbf{I}_n \text{ où } \mathbf{I}_n \text{ est la matrice de l'identité de } M_n(\mathbb{C})$$

On dit qu'une matrice $\mathbf{A}$ a la propriété de Dirac si $\mathbf{A}^2$ est une matrice scalaire.

On note $\text{tr}(\mathbf{M})$ la trace de la matrice $\mathbf{M}$, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On note $\det(\mathbf{M})$ le déterminant de la matrice $\mathbf{M}$.

Partie 1

Dans cette partie, on considère les matrices de $M_2(\mathbb{C})$

1°) Montrer que. $\forall \mathbf{M} \in M_2(\mathbb{C}) \quad \mathbf{M}^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\mathbf{M} + \det(\mathbf{M})\mathbf{I}_2 = 0$

2°) Montrer que si la matrice $\mathbf{A}$ a sa trace nulle alors la matrice $\mathbf{A}$ possède la propriété de Dirac.

3°) Montrer qu'une matrice $\mathbf{A}$ qui a la propriété de Dirac est une matrice dont la trace est nulle ou une matrice scalaire.

4°) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle, ensemble noté D_2 , est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$. Donner la dimension de D_2 .

5°) Soient les matrices : $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $(\mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{L})$ est une base de D_2 ,

b) Si $\mathbf{A} = x\mathbf{J} + y\mathbf{K} + z\mathbf{L}$. Calculer $\mathbf{A}^2$ en fonction de x, y, z et $\mathbf{I}_2$.

Partie 2

Dans cette partie on considère les matrices de $M_n(\mathbb{C})$

1°) Montrer que si $\mathbf{A}$ est une matrice qui vérifie la propriété de Dirac avec $\mathbf{A}^2$ non nulle alors

a) $\mathbf{A}$ est inversible.

b) $\mathbf{A}^{-1}$ vérifie aussi la propriété de Dirac

c) $\mathbf{A}$ n'a au plus que deux valeurs propres.

2°) Montrer que si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A+B}$ vérifient la propriété de Dirac alors la matrice $\mathbf{AB+BA}$ est scalaire.

Partie 3

Dans cette partie on considère les matrices de $M_4(\mathbb{C})$ et plus particulièrement les matrices:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{A} = 3\mathbf{M} + 2\mathbf{N} + 2\mathbf{P}$

1°) Calculer $\mathbf{M}^2, \mathbf{N}^2, \mathbf{P}^2$. Montrer que $\mathbf{MN} + \mathbf{NM} = \mathbf{MP} + \mathbf{PM} = \mathbf{NP} + \mathbf{PN} = 0$

2°) On considère le sous espace vectoriel D_n des matrices de la forme $\mathbf{H} = x\mathbf{M} + y\mathbf{N} + z\mathbf{P}$. Montrer que toutes les matrices de D_n ont la propriété de Dirac. En déduire $\mathbf{A}^2$.

3°) Démontrer que si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ alors nécessairement λ ne peut prendre que deux valeurs réelles que l'on déterminera

4°) a) Déterminer tous les sous espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$.

b) Donner une matrice $\mathbf{U}$ inversible et une matrice $\mathbf{D}$ diagonale telles que $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^{-1}$.