

2004

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants .

La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ et $\mathbf{M}(a, b, c)$ les matrices suivantes

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = e^{2i\pi/3}$. $j^2 = \bar{j} = e^{4i\pi/3}$ est une autre racine cubique de l'unité.

Partie I

I.1. Calculer $\mathbf{J}^2$ et $\mathbf{J}^3$.

I.2. Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{J}$. La matrice $\mathbf{J}$ est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$? L'est-elle sur le corps $\mathbb{R}$?

I.3. Pour chaque valeur propre de $\mathbf{J}$ déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice $\mathbf{P}$ de passage à une base de vecteurs propres.

I.4. Exprimer la matrice $\mathbf{M}(a, b, c)$ à l'aide des matrices $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ et $\mathbf{J}^2$. En déduire que $\mathbf{H} = \{\mathbf{M}(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour les lois usuelles (somme et loi externe). Précisez la dimension de $\mathbf{H}$.

I.5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de $\mathbf{J}$ sont aussi vecteurs propres de $\mathbf{J}^2$ ainsi que de $\mathbf{M}(a, b, c)$. En déduire les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, c)$ à l'aide de celles de $\mathbf{J}$, puis en fonction du nombre complexe j .

I.6. Montrer que tout élément de $\mathbf{H}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $\mathbf{M}(a, b, c)$ en fonction de la matrice $\mathbf{P}$ du I.3 et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.

I.7. On suppose ici que les coefficients (a, b, c) sont réels.

a) Montrer que toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.

b) Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, b)$ ainsi que les sous espaces propres réels associés.

Partie II

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{E}$. Dans cette partie on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de Id dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\mathbf{M}(a, b, c)$, en supposant que les coefficients (a, b, c) sont réels. Il est recommandé d'utiliser les résultats trouvés dans la première partie.

II. 1. Montrer qu'il existe deux couples (a, b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1. Préciser les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.

II.2. Montrer qu'il existe deux couples (a, b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0. Préciser les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.

II.3.a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes une matrice 3×3 à coefficients réels représente-t-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une rotation ?

b) Montrer que $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}^2$ sont des matrices de rotation de $\mathbf{E}$ préciser le cosinus de leurs angles de rotation.

c) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $a + b + c = 1$. En déduire que $ab + bc + ca = 0$.

Préciser l'axe de rotation ainsi que le cosinus de son angle de rotation en fonction de (a, b, c) .

Exercice 2

Dans ce qui suit, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les équations différentielles, de fonction inconnue f en la variable réelle x

$$(E_1) \quad f'(x) + xf(x) = 0$$

$$(E_2) \quad f'(x) + xf(x) = x^3$$

1. Donner la solution générale de (E_1) et l'unique solution f_0 telle que $f_0(0) = 1$

2. Donner la solution générale de (E_2) , et la fonction f_1 solution de (E_2) et telle que $f_1(0) = 0$

Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ et on note $I(R) = \int_0^R e^{\frac{-x^2}{2}} dx$

3. a) Montrer que $A = \int_0^{\infty} F(t)dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R)$ existe.

b) Soient $J(R) = \iint_C F(x)F(y)dxdy$ avec $C = [0, R] \times [0, R] = [0, R]^2$.

Exprimer $J(R)$ en fonction de $I(R)$

c) Soit $K(R) = \iint_D F(x)F(y)dxdy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Montrer que pour tout R positif on a $K(R) \leq J(R) \leq K(R\sqrt{2})$

d) Calculer la valeur de $K(R)$ par passage en coordonnées polaires. Calculer $\lim_{R \rightarrow +\infty} K(R)$ et en déduire que $A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

4. On considère la fonction $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)F(t)dt$

a) Justifier l'existence de $g(x)$

b) En admettant qu'on peut dériver sous l'intégrale, démontrer que g est solution de (E_1) [On transformera l'expression trouvée pour $g'(x)$ à l'aide d'une intégration par parties] .

c) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $F(x)$.

5. Donner le développement en série entière (et le rayon de convergence) de $G(x) = \int_0^x F(t)dt$.

Exercice 3

$P(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)$ est un polynôme de degré 3 dont les racines complexes a_1, a_2, a_3 sont distinctes. On note b_1, b_2 les racines du polynôme $P'(z)$, dérivé de $P(z)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 sont les points d'affixes respectives a_1, a_2, a_3, b_1, b_2

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{P'(z)}{P(z)}$

2. En déduire que $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{(b_1 - a_k)} = 0$. Que peut-on écrire pour b_2 ?

3. En déduire que $\sum_{k=1}^3 \lambda_k \overrightarrow{A_k B_1} = \vec{0}$ pour des coefficients λ_k réels à préciser, et que le point B_1 est à l'intérieur du triangle (A_1, A_2, A_3) [On rappelle que le barycentre de trois points dont les coefficients sont strictement positifs est intérieur au triangle défini par ces trois points]. Que peut on dire de B_2 ?
4. Calculer le coefficient de z dans $P'(z)$ à l'aide de a_1, a_2, a_3 , et en déduire que le point G , centre de gravité du triangle (A_1, A_2, A_3) est le milieu du segment $[B_1, B_2]$.
5. On se propose de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points B_1, B_2 associés au triangle (A_1, A_2, A_3) soient confondus.
- a) On suppose pour commencer que le centre de gravité G du triangle (A_1, A_2, A_3) est à l'origine. Que peut-on en déduire pour le coefficient de z^2 dans $P(z)$? Démontrer que dans ce cas on a $B_1 = B_2$ si et seulement si (A_1, A_2, A_3) est équilatéral de cercle circonscrit de centre O .
- b) En déduire une propriété analogue dans le cas général.
6. On se propose de montrer que les angles de vecteurs $(\overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 B_1})$ et $(\overrightarrow{A_1 B_2}, \overrightarrow{A_1 A_2})$ sont égaux.
- a) Montrer que $3(z - b_1)(z - b_2) = (z - a_1)(z - a_2) + (z - a_2)(z - a_3) + (z - a_3)(z - a_1)$ pour tout nombre complexe z .
- b) Montrer que $3(a_1 - b_1)(a_1 - b_2) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$, puis que les arguments des nombres complexes $\frac{b_1 - a_1}{a_3 - a_1}$ et $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - a_1}$ sont égaux (à 2π près).
- c) En déduire l'égalité des angles $(\overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 B_1})$ et $(\overrightarrow{A_1 B_2}, \overrightarrow{A_1 A_2})$. Donner par la même méthode deux autres égalités angulaires.
- d) Si dans le triangle (A_1, A_2, A_3) le point B_1 est connu, donner une construction géométrique du point B_2