

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices et le problème sont indépendants.  
La calculatrice personnelle est interdite.*

**Exercice 1**

Soit un espace vectoriel  $E$  de dimension 3, muni du repère  $B=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Soit  $f_\alpha$  un endomorphisme de  $E$  de matrice dans la base  $B$  ( $\alpha$  est un paramètre réel) :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique  $P_\alpha$  de  $A_\alpha$ . Préciser les valeurs de  $\alpha$  telles que  $P_\alpha$  a une racine double.
- 2) On suppose ici que  $\alpha$  vaut 3. Déterminer dans ce cas les valeurs propres et une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f_3$ .
- 3) On suppose que  $\alpha$  vaut 2. Montrer que dans ce cas  $f_2$  admet deux valeurs propres réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Calculer deux vecteurs propres,  $\vec{v}_1$  (associé à  $\lambda_1$ ) et  $\vec{v}_2$  (associé à  $\lambda_2$ ).  $f_2$  est-il diagonalisable?
- 4) Toujours pour  $\alpha=2$ , calculer la matrice  $K$  de l'endomorphisme  $g = (f_2 - 2Id)^2$  dans la base  $B$ . Montrer que  $(\vec{v}_2, \vec{e}_3)$  est une base de  $\text{Ker } g$ . Calculer  $f(\vec{e}_3)$  à l'aide de  $(\vec{v}_2)$  et de  $(\vec{e}_3)$ .
- 5) Montrer que  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3)$  est une base de  $E$ . Donner la matrice  $T$  de  $f_2$  dans la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3)$ .

**Exercice 2**

On considère les fonctions  $F_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\text{ch}^k(t)}$  pour  $k$  entier naturel non nul. On rappelle que

$$\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{et que} \quad \text{ch}^2 t - \text{sh}^2(t) = 1.$$

- 1) Justifier l'existence de  $F_k(x)$  pour tout réel  $x$ .
- 2) Pour tout entier naturel non nul  $k$ , on note  $I_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_k(x)$ . Justifier l'existence de  $I_k$ . Calculer  $I_1$ .  
[ Indication : on peut utiliser le changement de variable  $\text{sh}(t) = u$  ].

3) Calculer  $J(y) = \int_0^y \frac{du}{1+u^2}$ . Calculer, par une intégration par parties,  $K(y) = \int_0^y \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2}$ . En

déduire la valeur de  $L(y) = \int_0^y \frac{du}{(1+u^2)^2}$ .

4) À l'aide du changement de variable  $\text{sh}(t) = u$ , exprimer  $F_3(x)$  avec la fonction  $L$ .

5) On pose  $u_p = I_{2p-1}$

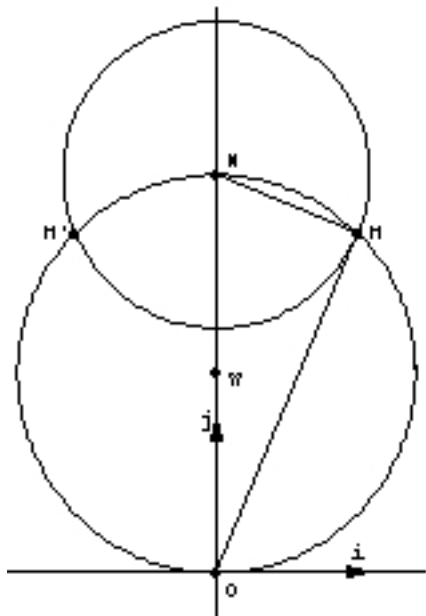
5a) Exprimer l'intégrale par le changement de variable précédent.

5b) Utiliser ensuite la décomposition  $\frac{1}{(1+u^2)^{p+1}} = \frac{1}{(1+u^2)^p} - \frac{u^2}{(1+u^2)^{p+1}}$  et une intégration par

parties pour démontrer la relation de récurrence  $u_{p+1} = \frac{2p-1}{2p} u_p$ .

5c) En déduire l'expression complète de  $u_{p+1}$  à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et du nombre  $p$ .

**Exercice 3**



Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On appelle  $K$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $(OMN)$  soit rectangle en  $M$ , avec  $N$  sur l'axe  $(y'y)$  et tel que  $MN=1$ .

1) On considère les points  $W(0;v)$  et  $N(0;2v)$ , où  $v$  est un paramètre réel tel que  $|v| \geq \frac{1}{2}$ .

Montrer que l'intersection d'un cercle  $C_1$  de centre  $N$  et de rayon 1 et d'un cercle  $C_2$  de centre  $W$  et passant par  $N$  est non vide et que les points d'intersection sont dans  $K$ . Donner les équations des cercles  $C_1$  et  $C_2$ .

2) Avec l'équation d'un des cercles, exprimer  $n$  en fonction de  $x$  et  $y$ . En reportant cette expression de  $n$  dans l'autre équation de cercle, montrer que  $K$  est inclus dans la courbe  $K'$  vérifiant l'équation  $x^4 + x^2 y^2 - y^2 = 0$  (on admettra dans la suite sans démonstration que  $K=K'$ ). Préciser les symétries de  $K$ .

3) On suppose ici que  $M$  a ses deux coordonnées strictement positives. et on note  $t$  la mesure de l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ . Calculer en fonction de  $t$  les longueurs  $OM$  et  $ON$ .

4) Pour un point  $M$  quelconque de  $K$  (de coordonnées non nécessairement positives), déduire de l'expression précédente et des symétries de  $K$  une représentation paramétrique de  $K$  à l'aide du paramètre  $t$ . Préciser des intervalles pour  $t$  permettant de parcourir  $K$  une seule fois.

5) On appelle  $D$  la droite passant par  $O$  orthogonale à la droite  $(OM)$  et  $H$  le point d'intersection de  $D$  et de la droite horizontale passant par  $N$ .

Déterminer en fonction de  $t$  non nul fixé:

- Les coordonnées du point  $N$ .
- La distance  $OH$ .
- Les coordonnées du point  $H$ .
- Montrer que la droite  $(HM)$  est la normale à la courbe  $K$  au point  $M$ .

## Problème

### Partie A

On note  $B$  l'ensemble des suites numériques (réelles ou complexes)  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  vérifiant la condition

$$M > 0, a > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M a^n$$

On leur associe la fonction  $G_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  qui est définie lorsque la série converge.

1) Montrer que  $G_u(x)$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{C}$  tel que  $|x| < \frac{1}{a}$ .

2) Montrer que l'ensemble des suites  $B$  est stable par addition, produit et contient les suites géométriques et les suites polynomiales (c.a.d. les suites  $u$  telles que  $u_n = P(n)$ ,  $P$  étant un polynôme). Donner un exemple de suite qui n'appartient pas à  $B$ .

3) Soit  $m$  un entier positif fixé, et une suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  de  $B$ , on définit la suite  $v = (v_n)_{n \geq 0}$  par  

$$v_n = u_{n-m} \text{ si } n \geq m \text{ et } v_n = 0 \text{ si } 0 \leq n < m$$

Exprimez la fonction  $G_v(x)$  à l'aide de  $G_u(x)$ .

4) On introduit les polynômes  $A_0(x) = 1$ ,  $A_1(x) = x$ ,  $A_2(x) = x(x-1)$  et plus généralement  $A_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1)$  pour  $k$  entier positif.

a- Pour une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de  $B$ , soit la suite  $w_k = (A_k(n)u_n)_{n \geq 0}$ . Exprimer la fonction  $G_{w_k}(x)$  à l'aide de  $G_u(x)$  en détaillant les cas  $k=1$ ,  $k=2$  et  $k>2$ .

b- On prend ici pour tout  $n$ ,  $u_n = 1$ . Calculer par récurrence sur  $k$  la fonction  $G_{w_k}(x)$  et préciser quel est le rayon de convergence de la série qui la définit.

c- On prend encore pour tout  $n$ ,  $u_n = 1$ , et le polynôme  $P(x) = x^3 + 4x^2$ . Déterminer la

décomposition  $P(x) = \sum_{k=0}^3 c_k A_k(x)$ , en déduire la fonction  $G_s(x)$  pour la suite  $s = (s_n)_{n \geq 0}$  telle que  $s_n = P(n)u_n$ .

## Partie B

On s'intéresse dans cette partie à l'équation récurrente (où l'inconnue est la suite  $y = (y_n)_{n \geq 0}$ )

$$(E) \quad y_n + \frac{15}{4}y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} = u_n \text{ pour } n \geq 0$$

et on prend comme convention que " $n < 0$ ,  $y_n = 0$ ", ce qui revient à poser :

$$y_0 = u_0, \quad y_1 + \frac{15}{4}y_0 = u_1, \quad y_2 + \frac{15}{4}y_1 + 3y_0 = u_2, \quad y_n + \frac{15}{4}y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} = u_n \text{ pour } n \geq 3$$

Cette équation (E) associe donc à toute suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  une suite unique  $y = (y_n)_{n \geq 0}$ .

Soit  $P$  le polynôme défini par:  $P(x) = 1 + \frac{15}{4}x + 3x^2 - x^3$

1) Exprimer la fonction  $G_y(x)$  à l'aide de  $G_u(x)$ .

2) Montrer que  $P(x)$  possède une racine double  $a$  et la calculer (on pourra diviser  $P(x)$  par  $P'(x)$ ).

En déduire l'autre racine  $b$  et la factorisation de  $P(x)$ .

3) Déterminer, par développement en série entière convergent au voisinage de 0, les suites

$$p = (p_n)_{n \geq 0}, \quad q = (q_n)_{n \geq 0}, \quad r = (r_n)_{n \geq 0}, \text{ telles que } G_p(x) = \frac{1}{x-a}, G_q(x) = \frac{1}{(x-a)^2}, G_r(x) = \frac{1}{x-b}$$

4) On prend ici dans (E) la suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_n = 0$  si  $n > 0$ .

a- Déterminer  $G_y(x)$

b- Calculer les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $G_y(x) = \alpha G_p(x) + \beta G_q(x) + \gamma G_r(x)$

c- Montrer que la solution  $y = (y_n)_{n \geq 0}$  de (E) s'écrit  $(-2)^n(cn+d) + e \frac{1}{4^n}$  et calculer les constantes  $c, d, e$ .