

2001

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.

La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

On considère la fonction $f: [0, \pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{x(\pi - y)}{2} \text{ si } 0 \leq x \leq y \leq \pi \text{ et } f(x, y) = \frac{y(\pi - x)}{2} \text{ si } 0 \leq y \leq x \leq \pi$$

Partie A

À Préciser la valeur de f sur les bords du carré $[0, \pi]^2$

• Montrer que " $(x, y) \in [0, \pi]^2$, $f(y, x) = f(x, y)$

• Calculer l'intégrale double $\int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) dx dy$

• À toute fonction continue $\psi: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, on associe la fonction u définie par:

$$u(x) = \int_0^x f(x, y) \psi(y) dy = \frac{(\pi - x)}{2} \int_0^x y \psi(y) dy + \frac{x}{2} \int_x^\pi (\pi - y) \psi(y) dy.$$

a) Montrer que u est deux fois dérivable et calculer $u'(x)$ et $u''(x)$

b) Montrer que u est solution de l'équation différentielle

$$- \frac{2}{\pi} u''(x) = \psi(x) \text{ avec } u(0) = 0 \text{ et } u(\pi) = 0$$

c) Dans le cas où $\psi(x) = \sin(nx)$ avec n entier strictement positif, donner l'expression de u sous forme d'une intégrale et donner la solution de l'équation différentielle du ^ b)

Partie B

Pour $y \in]0, \pi[$ on définit une fonction ϕ_y sur $\mathbb{R}$, 2 π -périodique et impaire telle que:

" $x \in [0, \pi]$, $\phi_y(x) = f(x, y)$

À Pour $y \in]0, \pi[$ donné, déterminer le développement en série de Fourier de ϕ_y .

[On peut soit faire le calcul direct, soit utiliser le résultat du ^ c)]

• Pour $(x, y) \in]0, \pi[^2$, en déduire une expression simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(ny)}{n^2}$ et de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$$

• a) À l'aide de la question précédente, calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

b) On pose $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ et $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S + S$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de S .

^ a) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^4}$, et en déduire la somme $T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$

b) On pose $T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4}$ et $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = T + T$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de T .

Problème 2

On associe à tout polynôme P à coefficients réels le polynôme $L(P)$ défini par

$$L(P)(x) = -xP'(x) + (x-1)P(x)$$

À Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. Montrer que L est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice $\mathbf{M}$ dans la base canonique de E : $B_1 = (T_0, T_1, T_2, T_3)$ avec $T_k : x \mapsto x^k$

` Déterminez la dimension du noyau et la dimension de l'image de L .

' Diagonalisez la matrice $\mathbf{M}$, (on notera λ_k , pour $0 \leq k \leq 3$, les valeurs propres de $\mathbf{M}$ rangées dans l'ordre croissant, et donc aussi valeurs propres de L). Déduisez-en la suite de polynômes $P_k(x)$ unitaires de degrés k (ayant 1 pour coefficient du terme de degré k) telle que $L(P_k) = \lambda_k P_k$. Montrez que $B_2 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .

^ On s'intéresse maintenant à la recherche de solutions polynomiales P de l'équation

$$L(P) - \lambda P = Q \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } Q \in E \text{ fixés} \quad (*)$$

a) On décompose $Q = \sum_{k=0}^3 a_k P_k$, et on recherche P sous la forme $P = \sum_{k=0}^3 b_k P_k$.

Établir les relations entre les coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq 3}$ et $(b_k)_{0 \leq k \leq 3}$

b) Montrer que si λ n'est pas valeur propre de $\mathbf{M}$, il existe une solution unique pour tout Q , et donner le développement de cette solution dans la base B_2 en fonction de $(a_k)_{0 \leq k \leq 3}$

c) Si λ est une valeur propre de L ($\lambda = \lambda_k$, avec $0 \leq k \leq 3$), quelle condition doit vérifier Q pour qu'il existe une solution ? Déterminer alors toutes les solutions de $(*)$ par leur développement dans la base B_2 .

d) On prend $\lambda = \lambda_2$, $Q(x) = -28 + 118x - 63x^2 + 7x^3$. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation $L(P) - \lambda_2 P = Q$ telle que $P(0) = 0$. Déterminer cette solution sous

la forme $P = \sum_{k=0}^3 b_k P_k$ en calculant les $(b_k)_{0 \leq k \leq 3}$

~ Montrez que P_3 possède 3 racines réelles distinctes dans l'intervalle $]0, +\infty[$, dont une dans l'intervalle $]0, 1[$ et une dans l'intervalle $]3, +\infty[$

Problème 3

Soit un plan P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note D_0 la droite d'équation $y = 0$, I le point de coordonnées $(0,1)$ et J le point de coordonnées $(0, -1)$.

Dans ce problème, si E est un ensemble de points du plan, on note $E^* = E \setminus (E \cap D_0)$, c'est à dire E privé de son intersection avec D_0

Partie A

À Soit M de coordonnées (x, y) avec $y \neq 0$ et $y \neq 1$. La droite (IM) coupe D_0 en W de coordonnées $(x_w, 0)$. Calculer x_w en fonction de (x, y)

• Soit $r = \frac{\overline{WI}}{\overline{WM}}$ Montrer que les coordonnées du point M tel que: $\overline{WM} = r \overline{WJ}$ vérifient

$$\begin{cases} x = \frac{-x}{y} \\ y = \frac{-1}{y} \end{cases} \quad (1)$$

• Pour $M(x, y)$ avec $y \neq 0$ la relation (1) définit une application f de $P^* = P \setminus D_0$ vers P^* , même si $y = 1$. Montrer que cette application est bijective et donner l'expression de sa bijection réciproque.

• Soit D une droite distincte de D_0 ayant pour équation cartésienne $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. L'image de D par f , notée D^* , est une droite D^* privée éventuellement d'un point. Donner une équation cartésienne de D^* à l'aide de (a, b, c) .

• Soient deux droites D_1 et D_2 toutes deux non parallèles à D_0 et strictement parallèles entre elles. Les images de D_1 et D_2 sont incluses dans les droites D_1^* et D_2^* . Quelle particularité présente l'intersection de D_1^* et D_2^* ?

• De même soient deux droites D_1 et D_2 (toutes deux distinctes de D_0) sécantes et dont l'intersection appartient à D_0 . Les images de D_1 et D_2 sont incluses dans les droites D_1^* et D_2^* . Quelle particularité géométrique présentent D_1^* et D_2^* ?

Partie B

Dans cette partie, f est toujours l'application de P^* vers P^* définie par (1). On note C le cercle de centre I et de rayon R avec R strictement positif, C^* ce cercle privé de ses points d'intersection éventuels avec D_0

À Donner une équation cartésienne de C ainsi que celle de l'image de C^* par f .

• Montrer qu'il existe une unique valeur de R (à déterminer) telle que l'image de C^* par f est une parabole dont on donnera une équation, le foyer et la directrice.

• Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une ellipse dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers, et l'excentricité en fonction de R .

• Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une hyperbole dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers, l'excentricité et les asymptotes en fonction de R .

• Pour $R > 1$ soient U et V les intersections de C avec D_0 . T_U et T_V sont les tangentes à C en U et V . Les images par f de T_U^* et T_V^* sont incluses dans les droites T_U^* et T_V^* . Montrer que T_U^* et T_V^* sont les asymptotes de l'image de C^* par f .