2000

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.

La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

Partie A

① Soit la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son rang, puis calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associées.

On se propose de déterminer les valeurs propres des matrices $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ carrées de dimensions n, telles que $a_{i,j} = 1$ si $i - j = 1$ ou si $i - j = -1$ et $a_{i,j} = 0$ dans les autres cas. On sait que de telles matrices symétrique réelles ont des valeurs propres toutes réelles.

② Soit λ une valeur propre de A_n, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé.

Soit k le numéro de ligne tel que $|x_k| = Max(|x_1|,\dots,|x_n|)$

Montrer que $|\lambda|\,|x_k| \leq |x_{k-1}| + |x_{k+1}|$ (En posant par convention $x_0 = x_{n+1} = 0$ si $k = 1$ ou $k = n$).

En déduire que $|\lambda| \leq 2$

Nous allons chercher dans la suite ces valeurs propres λ_k en posant $\lambda_k = 2\cos(\alpha_k)$

Partie B

① On considère les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles qui vérifient la relation de récurrence (R): $\quad k \geq 2, \quad x_k = (2\cos\alpha)x_{k-1} - x_{k-2}$ avec $0 < \alpha < \pi$

Montrer que les suites de puissances $(r^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifient (R) sont telles que r est une des solutions de l'équation $r^2 - (2\cos\alpha)r + 1 = 0$

Donner les solutions de cette équation sous forme d'exponentielles complexes.

② En déduire que les suites réelles $(\sin(k\alpha))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient (R) et les conditions $x_0 = 0$ et $x_1 \neq 0$

[Rappel : $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$]

③ Pour n donné, montrer que le vecteur de composantes $(\sin(k\alpha)), 1 \le k \le n$ est un vecteur propre pour la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ à condition que $\sin((n+1)\alpha) = 0$

④ Pour n donné et $0 < \alpha < \pi$, déterminer les valeurs de α telles que $\sin((n+1)\alpha) = 0$. En déduire n vecteurs propres de la matrice A_n, associés à n valeurs propres distinctes que l'on précisera.

⑤ Montrer que si r est un entier naturel non nul $\sum_{k=0}^{k=2n+1} e^{\frac{kr\pi i}{n+1}} = 0$. En déduire la somme $\sum_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{kr\pi}{n+1}\right)$ en distinguant le cas ou r est un entier naturel non nul, et le cas $r = 0$

⑥ Pour $1 \le r \le n$, on se donne la matrice unicolonne v_r de matrice transposée uniligne ${}^t v_r = \left(\sin\frac{r\pi}{n+1} \quad \sin\frac{2r\pi}{n+1} \quad \ldots \quad \sin\frac{kr\pi}{n+1} \quad \ldots \quad \sin\frac{nr\pi}{n+1}\right)$. Calculer le produit ${}^t v_r v_s$ en distinguant les cas où $r \ne s$ et où $r = s$ [Indication : préciser d'abord l'expression linéarisée de $\sin a \sin b$ et $\sin^2 a$]

⑦ On définit $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, la matrice carrée de dimensions n dont les colonnes sont les $v_1 \ldots v_n$ de la question précédente. Calculer le produit matriciel ${}^t PP$

⑧ En déduire le résultat du produit matriciel ${}^t P A_n P$

⑨ Sans effectuer de nouveaux calculs, déduire de ce qui précède les valeurs propres de la matrice C= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de dimension 5, ainsi qu'un vecteur propre pour la plus grande valeur propre.0

Problème 2

On note f la fonction de période 2π sur $\mathbb{R}$, et telle que $\begin{cases} f(x) = 0 \; si \; 0 \le x < \pi \\ f(x) = -\sin x \; si \; \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

Sa série de Fourier est notée $S_f(x)$, avec $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)]$

Partie A

① Calculer a_0, a_1 et b_1

② Montrer que si n≥2, $b_n = 0$, et calculer a_n en distinguant le résultat selon que n est pair ou impair. Écrire la série de Fourier de f.

③ Justifier que $f(\pi) = S_f(\pi)$, et en déduire la valeur de la série numérique $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$

④ Quelle est la série de Fourier de $g(x) = f(x) + \frac{\sin x}{2}$? Donner une expression plus simple de g . Montrer que g est paire et la représenter graphiquement sur È .

Partie B

Soit plus généralement h, de période 2π, continue, de classe C^1 par intervalles et telle que $h(0) = h(2\pi)$

On note $a_n(h)$, $b_n(h)$ les coefficients de Fourier de *h*, et $a_n(h')$, $b_n(h')$ ceux de la dérivée h'.

① Montrer que $a_0(h') = 0$. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que si $n \geq 1$, $a_n(h') = nb_n(h)$ et $b_n(h') = -na_n(h)$

② On suppose ici que $\int_0^{2\pi} [h'(x)]^2 dx$ converge. En déduire que la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} n^2[a_n^2(h) + b_n^2(h)]$ est convergente. Calculer sa somme en donnant le résultat à l'aide d'une intégrale.

③ Justifier que ces résultats s'appliquent à la fonction f .

Donner les valeurs de la somme des séries $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$ et $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2}{(4p^2 - 1)^2}$

Problème 3

On note (E) l'équation différentielle $4x\, y''(x) + 2\, y'(x) + y(x) = 0$, où *y(x)* désigne la fonction inconnue.

Partie A

On cherche ici les solutions de (E) qui sont développables en série entière sur un intervalle de centre 0, sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

① Montrer que si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E), alors si $n \geq 1, 2n(2n-1)a_n + a_{n-1} = 0$

② En déduire l'expression de a_n en fonction de a_0

③ Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ? En déduire qu'il existe une unique solution de (E) développable en série entière en 0, et telle que y(0)=1 . On notera $y_1(x)$ cette solution.

④ Vérifier que $y_1(x) = \cos\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$; que vaut $y_1(x)$ si $x < 0$?

Partie B

On cherche maintenant sur $]0, +\infty[$ les solutions de (E) de la forme, $y(x) = k(x)\, y_1(x)$ où $y_1(x)$ est la solution trouvée dans la partie A.

① Montrer que $y(x) = k(x)\, y_1(x)$ est solution de (E) si et seulement si $4xy_1(x)k''(x) + [8xy_1'(x) + 2y_1(x)]k'(x) = 0$, puis que $\dfrac{k''(x)}{k'(x)} = -\dfrac{1}{2x} - 2\dfrac{y_1'(x)}{y_1(x)}$ lorsque les dénominateurs ne sont pas nuls.

En déduire $k'(x)$ pour x>0 .

② Montrer que la dérivée de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est égale à $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; en déduire que $k(x) = \alpha \tan\sqrt{x} + \beta$, avec α ,β constantes réelles.

③ En déduire que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont de la forme $y(x) = \alpha \sin\sqrt{x} + \beta \cos\sqrt{x}$

④ Quelles sont les solutions de (E) dérivables en 0 ?

Peut-on déterminer une solution vérifiant $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$?