Logique, raisonnement et Ensembles

1. Logique et raisonnement
- 1. Valeur de vérité d'une assertion, négation, connecteurs logiques ET et OU.
- Lois de Morgan, propriétés des connecteurs logiques (commutativité, associativité, distributivité).
- Implication, contraposée, réciproque, équivalence.
- Prédicats, quantificateurs universel et existentiel.

  Il faut être capables de traduire un énoncé en français en une assertion mathématique et réciproquement.
- Non commutativité et négation des quantificateurs.
- Méthodes de raisonnements :
  - par raisonnement direct,
  - contraposée,
  - disjonctions de cas,
  - double implications,
  - raisonnement par analyse-synthèse.
- Démonstration par récurrence, simple, double ou forte.

2. Ensembles
- Ensembles : A partir de l'appartenance, définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles.

  L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique.
- Définition d'une partie d'un ensemble E et de l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.
- Intersection et union : définition, commutativité, associativité. Ensembles disjoints.
- Complémentaire $\bar{\mathrm{A}}$, différence de deux ensembles. Propriétés (lois de Morgan...).
- Produit cartésien d'ensembles.
- Applications : définition, image, antécédent.
- Fonctions surjective et injective (notions). Définition et caractérisation.
- Image directe, image réciproque. Ces définitions devront être parfaitement sues.
- Stabilité ou non de l'image directe et réciproque par l'union et l'intersection.

Questions de cours possibles [1] :

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. La démonstration du lemme nécessaire à la démonstration pourra être admis ou démontré. Ce choix est laissé à l'appréciation du candidat.
2. Donner et démontrer, par récurrence, la valeur explicite des sommes usuelles $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Montrer que fonction strictement monotone est injective sur son domaine de définition.
4. Stabilité (ou non) de l'image directe et réciproque de l'union et de l'intersection.
5. ($\star$) Mise en œuvre d'un raisonnement par analyse/synthèse sur un exemple :

   Montrer que $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ *paire,* h *impaire, tel que* $f = g + h$.
6. ($\star$) Mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence sur un exemple :

   Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ *admet un diviseur premier.*

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.