Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. La démonstration du lemme nécessaire à la démonstration pourra être admis ou démontré. Ce choix est laissé à l'appréciation du candidat.

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon \implies a = 0$.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$.

Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \iff (f \text{ est bijective et } f^{-1} = f)$.

Correction :

$\implies$ Comme Id_E est surjective, alors $f \circ f$ est surjective, et donc f est surjective.

Comme Id_E est injective, alors $f \circ f$ est injective, et donc f est injective.

f est donc bijective, et alors $f^{-1} \circ f \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, soit $f = f^{-1}$.

$\Leftarrow$ AQT

Exercice 3 : Montrer $\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours :

1. Donner une propriété concernant $f^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ et la démontrer.
2. Donner une propriété concernant $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et la démontrer.

Exercice 1 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Correction :

1. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
2. f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$.

   On peut également proposer $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2 :

1. Sur quels intervalles les plus grands possible, la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ est-elle injective ?
2. Déterminer $f(]-2, 4])$.

Exercice 3 : Soit $s_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, s_{n+1} = s_n + 3n(n+1)$.

Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un multiple de 6.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall\, \mathrm{M} > 0, \exists\, \mathrm{A} > 0, \forall\, x \geqslant \mathrm{A}, f(x) > \mathrm{M}$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Correction :

1. $\exists\, \mathrm{M} > 0, \forall\, \mathrm{A} > 0, \exists\, x \geqslant \mathrm{A}, f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
2. $\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \eta > 0,\ \exists\, (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Exercice 2 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.

Montrer que $f(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $f^{(n)} = f \circ f \circ f \ldots \circ f$ (composée successive de n fonctions f).

Donner l'expression de $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$. Conjecturer une expression de $f^{(n)}$. et prouver cette conjecture.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Soit a et b deux réels. Montrer que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 : On ne cherchera pas ici à savoir si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou pas. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

En déduire qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Correction : $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

— Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ alors en posant $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$, on a bien a et b irrationnels et a^b rationnel.

— Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ alors en posant $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, on a bien a et b irrationnels et a^b rationnel.

Exercice 3 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+2y) \end{array}$.

Correction : Posons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} 2x - y = a \\ x + 2y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{2a+b}{5} \\ y = \dfrac{-a+2b}{5} \end{cases}$$

On constate qu'on a trouvé un antécédent, et un seul, pour tout couple de $\mathbb{R}^2$. Donc f est bijective.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On pose $\mathrm{E} = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}^\star / f(x) = y\}$. Montrer que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^\star$.

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\, x^2 \geqslant x$
2. $\forall\, x > 0, \exists\, y > 0,\, y < x$
3. $\forall\, n \in \mathbb{N},\, \exists\, p \in \mathbb{N}, p = 2n$

Correction :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant x$: FAUX, ça ne marche pas si $x \in]0;1[$, par exemple $x = 0.5$.
2. $\forall\, x > 0, \exists\, y > 0, y < x$: VRAI (en admettant que x et y sont des réels), on peut toujours prendre par exemple $y = \dfrac{x}{2}$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, p \in \mathbb{N}, p = 2n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 2 , et le résultat sera toujours un entier naturel.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ telle que $f \circ f = f$.

Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Correction :

— Supposons f injective.

Soit $x \in \mathrm{E}$. Par hypothèse $f \circ f(x) = f(x)$, i.e. $f(f(x)) = f(x)$. f étant injective, on en déduit $f(x) = x$.

Et donc $f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

— Supposons f surjective.

Soit $x \in \mathrm{E}$. Par hypothèse, il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f(x_0) = x$.

Par conséquent $f \circ f(x_0) = f(x_0)$, i.e. $f(x) = x$.

Et donc $f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Exercice 3 : Montrer $\forall\, n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours :

1. Donner une propriété concernant $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ et la démontrer.
2. Donner une propriété concernant $f^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et la démontrer.

Exercice 1 : Soit a et b deux réels. Montrer que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 :

1. Soit $\mathrm{N}_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*_{n_0}$.
2. Soit $\mathrm{M} = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec :

$$\mathrm{P} = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots + 0,66666\ldots \\ + 0,77777\ldots + 0,88888\ldots + 0,99999\ldots$$

Correction :

1. Soit $p = 1997\,1997\ldots1997$ et $q = 1\,0000\,0000\ldots0000 = 10^{4n}$.

   Alors $\mathrm{N}_n = \dfrac{p}{q}$.
2. Remarquons que $10\,000 \times \mathrm{M} = 1997,1997\,1997\ldots$ Alors $10\,000 \times \mathrm{M} - \mathrm{M} = 1997$; donc $9999 \times \mathrm{M} = 1997$ d'où $\mathrm{M} = \dfrac{1997}{9999}$.
3. $0,111\ldots = \dfrac{1}{9}$, $0,222\ldots = \dfrac{2}{9}$, etc.

   D'où $\mathrm{P} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} + \cdots + \dfrac{9}{9} = \dfrac{1+2+\cdots+9}{9} = \dfrac{45}{9} = 5$.

Exercice 3 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Exercice 1 : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 2 : Démontrer les implications suivantes, où f et g désignent deux fonctions :

1. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
2. La composée de deux fonctions surjectives est surjective.

Exercice 3 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que dire de f quand elle satisfait les affirmations suivantes ?

1. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
2. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
3. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
4. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$.

Exercice 2 : Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et B par :

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

où $\bar{\mathrm{A}}$ désigne le complémentaire de A dans E. Démontrer que $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathrm{A} = \varnothing$.

Exercice 3 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-3y, -2x+6y) \end{array}$.

Correction : f n'est pas injective car $f(0,-1) = f(3,0)$.

f n'est pas surjective car $(0,1)$ n'a pas d'antécédent par f. Sinon, on aurait $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -2x + 6y = 1 \end{cases}$. Or $-2x + 6y = -2(x - 3y)$ d'où $1 = -2 \times 0$!