Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. La démonstration du lemme nécessaire à la démonstration pourra être admis ou démontré. Ce choix est laissé à l'appréciation du candidat.

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon \implies a = 0$.

Exercice 2 : Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 : Montrer $\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective sur son domaine de définition.

Exercice 1 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 2 : Soient E un ensemble, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Montrer :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \iff \mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{C}}.$$

Exercice 3 : Soit $s_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, s_{n+1} = s_n + 3n(n+1)$.

Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un multiple de 6.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall\, \mathrm{M} > 0, \exists\, \mathrm{A} > 0, \forall\, x \geqslant \mathrm{A}, f(x) > \mathrm{M}$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.

Montrer que $f(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.

Exercice 3 : On considère une suite d'ensembles $\left(\mathrm{A}_j\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer par récurrence la première formule de Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_k}.$$

2. En déduire, sans récurrence, la deuxième formule de Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_k}.$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists!(g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Soit a et b deux réels. Montrer que si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 :

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, p, q \in \mathbb{N},\ \ n = 2^p(2q + 1)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Donner et démontrer, par récurrence, la valeur explicite des sommes usuelles $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
2. $\forall\, x > 0, \exists\, y > 0,\ y < x$
3. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, p \in \mathbb{N}, p = 2n$

Exercice 2 : Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 3 : Montrer $\forall\, n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Stabilité (ou non) de l'image directe et réciproque de l'union et de l'intersection.

Exercice 1 : Soit a et b deux réels. Montrer que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 : Montrer que $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Exercice 1 : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 2 : Soient f une application de E vers F et $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J.

Montrer que $f^{-1}(\bigcap_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{B}_i) = \bigcap_{i\in\mathrm{J}} f^{-1}(\mathrm{B}_i)$.

Exercice 3 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que dire de f quand elle satisfait les affirmations suivantes ?

1. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
2. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
3. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
4. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$.

Exercice 2 : Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et B par :

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

où $\bar{\mathrm{A}}$ désigne le complémentaire de A dans E. Démontrer que $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathrm{A} = \varnothing$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$