Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. La démonstration du lemme nécessaire à la démonstration pourra être admis ou démontré. Ce choix est laissé à l'appréciation du candidat.

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon \implies a = 0$.

Exercice 2 : Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 : Montrer $\forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective sur son domaine de définition.

Exercice 1 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Correction :

1. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
2. f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$.

   On peut également proposer $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2 : Soient E un ensemble, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Montrer :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \Longleftrightarrow \mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{C}}.$$

Exercice 3 : Soit $s_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, s_{n+1} = s_n + 3n(n+1)$.

Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un multiple de 6.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall\, \mathrm{M} > 0, \exists\, \mathrm{A} > 0, \forall\, x \geqslant \mathrm{A}, f(x) > \mathrm{M}$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Correction :

1. $\exists\, \mathrm{M} > 0, \forall\, \mathrm{A} > 0, \exists\, x \geqslant \mathrm{A}, f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
2. $\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \eta > 0,\ \exists\, (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Exercice 2 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.

Montrer que $f(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.

Exercice 3 : On considère une suite d'ensembles $\left(\mathrm{A}_j\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer par récurrence la première formule de Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_k}.$$

2. En déduire, sans récurrence, la deuxième formule de Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_k}.$$

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Soit a et b deux réels. Montrer que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 :

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Correction :

1. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \dfrac{p'}{q'}$. Donc $x = \dfrac{p'}{q'} - \dfrac{p}{q} = \dfrac{qp' - pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

   De la même façon si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ alors $r \cdot x = \dfrac{p'}{q'}$ Et donc $x = \dfrac{p'}{q'}\dfrac{q}{p}$. Ce qui est absurde.

2. *Méthode "classique".* Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

   De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}_{n_0}$, d'où $p^2 = 4 \times {p'}^2$.

   Nous obtenons $q^2 = 2 \times {p'}^2$.

   Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair.

   Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

   Autre méthode. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*_{n_0}$. Alors nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}_{n_0}$.

   Considérons l'ensemble suivant :

   $$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^*_{n_0} \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}_{n_0} \right\}.$$

   Cet ensemble $\mathcal{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*_{n_0}$ qui est non vide car $q \in \mathcal{N}$.

   On peut alors prendre le plus petit élément de $\mathcal{N}$: $n_0 = \min \mathcal{N}$.

   En particulier, $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}_{n_0}$.

   Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$.

   Il se trouve que n_1 appartient aussi à $\mathcal{N}$ car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}_{n_0}$.

   Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0.

   Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ et est non nul.

   Bilan : nous avons trouvé $n_1 \in \mathcal{N}$ strictement plus petit que $n_0 = \min \mathcal{N}$. Ceci fournit une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$.

   D'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\dfrac{r' - r}{2}\right) \notin \mathbb{Q}$ donc $x \notin \mathbb{Q}$.

   Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1)$.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Donner et démontrer, par récurrence, la valeur explicite des sommes usuelles $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
2. $\forall x > 0, \exists y > 0,\ y < x$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$

Correction :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant x$: FAUX, ça ne marche pas si $x \in]0;1[$, par exemple $x = 0.5$.
2. $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$: VRAI (en admettant que x et y sont des réels), on peut toujours prendre par exemple $y = \dfrac{x}{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 2 , et le résultat sera toujours un entier naturel.

Exercice 2 : Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Correction : Par l'absurde supposons que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel.

Il s'écrit alors $\dfrac{p}{q}$ avec $p \geqslant 0, q > 0$ des entiers.

On obtient $q \ln 3 = p \ln 2$.

En prenant l'exponentielle nous obtenons : $\exp(q \ln 3) = \exp(p \ln 2)$ soit $3^q = 2^p$. Si $p \geqslant 1$ alors 2 divise 3^q donc 2 divise 3, ce qui est absurde.

Donc $p = 0$. Ceci nous conduit à l'égalité $3^q = 1$, donc $q = 0$.

La seule solution possible est $p = 0$, $q = 0$. Ce qui contredit $q \neq 0$.

Donc $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 3 : Montrer $\forall\, n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Stabilité (ou non) de l'image directe et réciproque de l'union et de l'intersection.

Exercice 1 : Soit a et b deux réels. Montrer que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 : Montrer que $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Exercice 1 : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 2 : Soient f une application de E vers F et $(\mathrm{B}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J.

Montrer que $f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{B}_i\Big) = \bigcap_{i \in \mathrm{J}} f^{-1}(\mathrm{B}_i)$.

Exercice 3 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Logique, raisonnement et Ensembles

Question de cours : Montrer que $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que dire de f quand elle satisfait les affirmations suivantes ?

1. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y,$
2. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y,$
3. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y,$
4. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y.$

Exercice 2 : Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et B par :

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

où $\bar{\mathrm{A}}$ désigne le complémentaire de A dans E. Démontrer que $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathrm{A} = \varnothing$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$