Arithmétique

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer le pgcd de 8 136 et de 492 par deux méthodes différentes. En déduire leur ppcm par deux méthodes différentes.

2. Décomposer 21! en produit de facteurs premiers. Combien possède-t-il de diviseurs ?

3. Démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ 13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}$. *Remarque* : la notion de congruence étant hors-programme, ne pas l'utiliser.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n^3 - 3n^2 + 8n$ est divisible par 3.

5. Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel N par 7 est 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de N^2 puis de N^3 par 7.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{A}_n = n^4 - 8n^2 + 4$. Démontrer que si $n \geqslant 4$, alors A_n n'est pas premier. *Indication* : utiliser l'identité $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$.

7. Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9. (*Par exemple,* $1^3+2^3+3^3$ *est une somme de trois cubes consécutifs*).

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'affirmation suivante :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad k \mid (k+1)^n + 2.$$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que son reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3. Montrer que $n^2 + 1$ est divisible par 5.
   (b) $\star$ Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 5.