Arithmétique

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer le pgcd de 8 136 et de 492 par deux méthodes différentes. En déduire leur ppcm par deux méthodes différentes.

Correction :

MÉTHODE 1 : PAR L'ALGORITHME D'EUCLIDE.

$$\begin{aligned} 8\ 136 &= 492 \times 16 + 264 \\ 492 &= 264 \times 1 + 228 \\ 264 &= 228 \times 1 + 36 \\ 228 &= 36 \times 6 + 12 \\ 36 &= 12 \times 3 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\boxed{\text{pgcd}(8\ 136, 492) = 12}$. Donc $\boxed{\text{ppcm}(8\ 136, 492) = \dfrac{8\ 136 \times 492}{12} = 333\ 576.}$

MÉTHODE 2 : PAR DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS. On écrit :

$$8\ 136 = 2^3 \times 3^2 \times 113 \qquad \text{et} \qquad 492 = 2^2 \times 3 \times 41.$$

Pour connaître le PGCD, on garde leurs facteurs premiers communs (avec la plus petite puissance possible), donc on obtient :

$$\text{pgcd}(8\ 136, 492) = 2^2 \times 3^1 = 12.$$

Pour connaître le PPCM, on considère chaque facteur premier avec la plus grande puissance à chaque fois, ce qui donne :

$$\text{ppcm}(8\ 136, 492) = 2^3 \times 3^2 \times 41 \times 113 = 333\ 576.$$

2. Décomposer 21! en produit de facteurs premiers. Combien possède-t-il de diviseurs ?

Correction : Un peu de courage ! On décompose chaque entier entre 2 et 21 en produit de facteurs premiers, puis on regroupe tout :

$$\begin{aligned} 21! &= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20 \times 21 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5) \times 2^4 \ldots \\ &\qquad \ldots \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5) \times (3 \times 7) \\ &\boxed{= 2^{18} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^3 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19.} \end{aligned}$$

Tout diviseur de 21! s'écrit $2^a 3^b 5^c 7^d 11^e 13^f 17^g 19^h$ où $a, \ldots, h$ sont des entiers vérifiant $a \in [\![0;18]\!]$, $b \in [\![0;9]\!]$, $c \in [\![0;4]\!]$, $d \in [\![0;3]\!]$ puis $e, f, g, h \in [\![0;1]\!]$. En tout, cela fait $19 \times 10 \times 5 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 60\,800$ diviseurs de 21! (car 19 choix pour a, 10 pour b, 5 pour c etc.).

3. Démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ 13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}$.

Remarque : la notion de congruence étant hors-programme, ne pas l'utiliser.

Correction : Si $n \in \mathbb{N}$, on a $2^{4n+2} + 3^{n+2} = 4 \times 16^n + 9 \times 3^n$, dont on cherche à démontrer qu'il est divisible par 13. Procédons par récurrence en posant (P_n) : « $13 \mid 4 \times 16^n + 9 \times 3^n$ ».

Initialisation. Avec $n = 0$, on a $4 \times 16^0 + 9 \times 3^0 = 4 + 9 = 13$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie ; démontrons (P_{n+1}). Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4 \times 16^n + 9 \times 3^n = 13k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 4 \times 16^{n+1} + 9 \times 3^{n+1} &= 16 \times 4 \times 16^n + 3 \times 9 \times 3^n \\ &= 16 \times 4 \times 16^n + 3(13k - 4 \times 16^n) && \text{(hyp. de réc.)} \\ &= 16 \times 4 \times 16^n - 3 \times 4 \times 16^n + 3 \times 13k \\ &= 13 \times 4 \times 16^n + 3 \times 13k \\ &= 13(4 \times 16^n + 3k), \end{aligned}$$

avec $4 \times 16^n + 3k \in \mathbb{N}$, ce qui montre que 13 divise $4 \times 16^{n+1} + 9 \times 3^{n+1}$, donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, on a montré que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad 13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}.}$$

Commentaires : *Pour ceux ayant fait Maths expertes, les congruences permettent de conclure en quelques lignes sans aucune récurrence !*

En effet, $16 \equiv 3\ [13]$ *donc* $16^n \equiv 3^n\ [13]$ *(propriété sur les congruences).*

Donc, par combinaison linéaire, on a $4 \times 16^n + 9 \times 3^n \equiv 4 \times 3^n + 9 \times 3^n\ [13] \equiv 13 \times 3^n\ [13] \equiv 0\ [13]$ *d'où le résultat.*

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n^3 - 3n^2 + 8n$ est divisible par 3.

Correction : Procédons par récurrence. On définit (P_n) : « $n^3 - 3n^2 + 8n$ est divisible par 3 ».

Initialisation. Avec $n = 0$, $0^3 - 3 \times 0^2 + 8 \times 0 = 0$ est bien divisible par 3, donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie ; montrons (P_{n+1}) :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 8(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 6n - 3 + 8n + 8 \\ &= (n^3 - 3n^2 + 8n) + (3n^2 - 3n + 9). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $n^3 - 3n^2 + 8n$ est divisible par 3. Or $3n^2 - 3n + 9 = 3(n^2 - n + 3)$ est divisible par 3, donc par somme, $(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 8(n+1)$ l'est aussi : (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid n^3 - 3n^2 + 8n.}$$

5. Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel N par 7 est 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de N^2 puis de N^3 par 7.

Correction : Par hypothèse, il existe un unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N} = 7q + 2$. On a alors :

$$\mathrm{N}^2 = (7q+2)^2 = 7^2q^2 + 7 \times 4q + 4 = 7(7q^2 + 4q) + 4 = 7q' + 4,$$

où l'on a posé $q' = 7q^2 + 4q \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leqslant 4 < 7$, l'écriture $\mathrm{N}^2 = 7q' + 4$ est exactement la division euclidienne de N^2 par 7 ; $\boxed{\text{son reste est de } 4.}$

De même, on a :

$$\mathrm{N}^3 = (7q+2)(7q'+4) = 7(7qq' + 4q + 2q') + 8 = 7(7qq' + 4q + 2q' + 1) + 1 = 7q'' + 1,$$

où l'on a posé $q'' = 7qq' + 4q + 2q' + 1 \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leqslant 1 < 7$, on a donc bien écrit la division euclidienne de N^3 par 7, $\boxed{\text{son reste est de } 1.}$

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{A}_n = n^4 - 8n^2 + 4$. Démontrer que si $n \geqslant 4$, alors A_n n'est pas premier.

Indication : utiliser l'identité $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$.

Correction : Grâce à l'indication, on a $n^4+4 = (n^2)^2+2^2 = (n^2-2)^2+2\times n^2\times 2 = (n^2-2)^2+4n^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_n = (n^2-2)^2 - 8n^2 + 4n^2 &= (n^2-2)^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 - 2 - 2n)(n^2 - 2 + 2n) && \text{(identité remarquable)} \\ &= ((n-1)^2 - 1)((n+1)^2 - 3) && \text{(mise sous forme canonique).}\end{aligned}$$

Si $n \geqslant 4$, alors $(n-1)^2 \geqslant 9$ (croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) donc $(n-1)^2 - 1 \geqslant 8 > 1$. De même, $(n+1)^2 - 3 \geqslant 5^2 - 3 = 22 > 1$. Le nombre A_n est donc le produit de deux entiers naturels > 1, donc $\boxed{\text{n'est pas premier.}}$

7. Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

($\mathit{Par\ exemple,}\ 1^3 + 2^3 + 3^3\ \mathit{est\ une\ somme\ de\ trois\ cubes\ consécutifs}$).

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathrm{N} = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ est divisible par 9.

Après développement, on a $\mathrm{N} = 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2)$.

Il suffit donc de montrer que $n(n^2+2)$ est divisible par 3. On distingue alors trois cas (on raisonne modulo 3) :

— Si $n = 3k$, avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $n(n^2+2) = 3k(9k^2+2)$ est divisible par 3.

— Si $n = 3k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$.

  Alors $n(n^2+2) = (3k+1)(9k^2+6k+1+2) = (3k+1)(9k^2+6k+3) = 3(3k+1)(3k^2+2k+1)$ est divisible par 3.

— Si $n = 3k+2$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Arithmétique

Alors $n(n^2+2) = (3k+2)(9k^2+12k+4+2) = (3k+2)(9k^2+12k+6) = 3(3k+2)(3k^2+4k+2)$ est divisible par 3.

Bilan : dans tous les cas, $n(n^2+2)$ est divisible par 3, donc $\boxed{\text{N} = 3n(n^2+2) \text{ est divisible par } 9.}$

Commentaires : *On pouvait aussi procéder par récurrence.*

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'affirmation suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad k \mid (k+1)^n + 2.$$

Correction : Procédons à nouveau par récurrence, en définissant (H_n) : « $k \mid (k+1)^n + 2$. ».

Commençons par étudier l'initialisation. Si $n = 0$, alors $(k+1)^0 + 2 = 3$, donc (H_0) est vraie si et seulement si k divise 3, c'est-à-dire $k = 1$ ou $k = 3$. On distingue donc trois cas :

— $\boxed{\text{Si } k \neq 1 \text{ et } k \neq 3, \text{ alors l'affirmation de l'énoncé est fausse.}}$

— Si $k = 1$, alors $\boxed{\text{il est toujours vrai que 1 divise } 2^n + 2}$ car 1 divise tous les entiers...

— Il reste à étudier le cas où $k = 3$, ce qu'on suppose par la suite.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) est vraie. Par hypothèse, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $4^n + 2 = 3q$. Donc,

$$4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2 = 4(3q - 2) + 2 = 3 \times 4q - 6 = 3q',$$

en posant $q' = 4q - 2 \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $3 \mid 4^{n+1} + 2$ donc (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid 4^n + 2.}$$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que son reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3. Montrer que $n^2 + 1$ est divisible par 5.

Correction : Par hypothèse, on peut écrire $n = 5q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{2, 3\}$. Donc :

$$n^2 + 1 = (5q + r)^2 + 1 = 25q^2 + 10qr + r^2 + 1 = 5(5q^2 + 2qr) + r^2 + 1.$$

- Si $r = 2$, alors $r^2 + 1 = 5$ donc $n^2 + 1 = 5(5q^2 + 2qr + 1)$ est divisible par 5.
- Si $r = 3$, alors $r^2 + 1 = 10$ donc $n^2 + 1 = 5(5q^2 + 2qr + 2)$ est divisible par 5.

Dans tous les cas, $\boxed{n^2 + 1 \text{ est divisible par } 5.}$

(b) ⋆ Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 5.

Correction : Posons $p_n = n^5 - n$. Si $n = 0$, $p_0 = 0$ est divisible par 5. Si $n \geqslant 1$, on factorise :

$$p_n = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1).$$

On distingue 5 cas, selon ce que vaut le reste de la division euclidienne de n par 5. On garde les mêmes notations qu'avant : $n = 5q + r$.

(1) Si $r = 0$, alors n est divisible par 5, donc le produit p_n aussi.
(2) Si $r = 1$, alors $n - 1 = 5q$ est divisible par 5, donc p_n aussi.
(3) Si $r = 2$, alors $n^2 + 1$ est divisible par 5 (question précédente), donc p_n aussi.
(4) Si $r = 3$, idem.
(5) Si $r = 4$, alors $n + 1 = 5q + 5$ est divisible par 5, donc p_n aussi.

Bilan : dans tous les cas, $\boxed{p_n = n^5 - n \text{ est divisible par } 5.}$