Arithmétique

I/ Ensembles

Exercice 1 : Montrer que les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}$.

1. $a = 8,313131\ldots \in \mathbb{Q}$
2. $b = 1,24242424\ldots$
3. $c = 123,32576576576576\ldots$
4. $d = 0,142857142857\ldots$
5. $e = 0,99999999999\ldots$

Exercice 2 : Montrer que :

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
2. $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$

II/ Divisibilité

Exercice 3 : Déterminer les entiers naturels n et m qui vérifient :

1. $n^2+n=20$.
2. $n^2+2n=35$.
3. $n^2-m^2=9$.
4. $nm-5n-5m-7=0$.

Exercice 4 : Déterminer les entiers n tels que :

1. 7 divise $n+3$.
2. $2n-5$ divise 6.
3. $2n-3$ divise $n+5$.
4. $n+1$ divise $3n-4$
5. $n+3|n+9$.

Exercice 5 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que 2 divise $n(n+1)$.
2. Montrer que 3 divise $n(n+1)(n+2)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel a, 6 divise $a(a^2-1)$.

Exercice 6 : Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, 10^n-1 est divisible par 9.

Exercice 7 : Prouver que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la fraction $\dfrac{21m+4}{14m+3}$ est irréductible.

Exercice 8 :

1. La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels ?
2. Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.
3. Trouver les entiers naturels n qui, divisés par 4, donnent un quotient égal au reste.
4. Le quotient d'un entier naturel x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ?

   En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.
5. Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+3$?

Même question avec $(n+5)^2$ et $n+3$.

Exercice 10 : Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, le nombre $n^4 - 8n^2 + 4$ n'est pas premier.

Exercice 11 : Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n.

Exercice 12 : Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.

Arithmétique

Un peu d'histoire : *Un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres est parfait. Un diviseur propre est un diviseur autre que le nombre lui-même.*

Le premier nombre parfait est 6. *En effet* 1, 2 *et* 3 *sont les diviseurs propres de* 6 *et* $1+2+3=6$.

— 28 *est également un nombre parfait :* $1+2+4+7+14=28$.

— *Les nombres parfaits sont rares, il n'en existe que trois inférieurs à* 1000 *qui sont* 6 *,*28 *et* 496.

  Ensuite vient 8 128 , puis 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128 (découvert par Leonhard Euler), 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176, ...

— *Actuellement,* 51 *nombres parfaits sont connus. Le plus grands possède 12 640 858 chiffres et est égal à :*

$$2^{20996010}\left(2^{20996011-1}\right).$$

  Comme pour le plus grand nombre premier, c'est le projet GIMPS qui détient le record.

Dans le IX$^{\text{ème}}$ *livre des Éléments, Euclide d'Alexandrie* $(-320?;-260$ *?) expose une façon de générer des nombres parfaits. C'est le propos de l'exercice suivant :*

Exercice 13 (Théorème d'Euclide) :

1. **(Exemples)** Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombre parfait :

   « Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1}-1)$ et si $2^{n+1}-1$ est premier, alors a est parfait ».

   Trouver alors les quatre premiers nombres parfaits. (On ne demande pas de prouver la règle).
2. **(Démonstration)** On pose $a = 2^n(2^{n+1}-1)$ et on suppose que $2^{n+1}-1$ est premier.
   (a) Quelle est la décomposition de a en facteurs premiers ?
   (b) En déduire la liste des diviseurs de a.
   (c) Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts de a est égale à ce nombre a.

Remarque : Le problème de savoir s'il existe des nombres parfaits impairs n'est toujours pas résolu.

Exercice 14 : Montrer que l'intervalle $[\![n!+2, n!+n]\!]$ (pour $n \geqslant 2$) ne contient aucun nombre premier.

III/ PGCD et PPCM

Exercice 15 : Déterminer le PGCD de 8870 et de 3120.

Exercice 16 :

1. Calculer $598 \wedge 84$.
2. Réduire la fraction $\dfrac{1764}{945}$.
3. Calculer $186 \vee 33$ et $280 \vee 100$.

Exercice 17 : Déterminer, suivant les valeurs de $n \geqslant 3$ le PGCD de $5n-9$ et $2n-6$.

Exercice 18 : Calculer $(15a+4b) \wedge (11a+3b)$ en fonction de $a \wedge b$.

Exercice 19 : Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a \leqslant b$ vérifiant :

$$a + b = 256 \text{ et } a \wedge b = 16.$$

Exercice 20 : Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $x+y = 84$ et $(x \wedge y)^2 = (x \vee y)$.

Exercice 21 : Déterminer deux entiers naturels a et b connaissant leur produit 1512 et leur ppcm 252.

Exercice 22 : Soient d et m, respectivement le pgcd et le ppcm de deux naturels a et b.

Déterminer a et b tels que $m - 2d = 11$.