Arithmétique

I/ Ensembles

Exercice 1 : Montrer que les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}$.

1. $a = 8,313131\ldots \in \mathbb{Q}$
2. $b = 1,24242424\ldots$
3. $c = 123,32576576576576\ldots$
4. $d = 0,142857142857\ldots$
5. $e = 0,99999999999\ldots$

Correction : $100a = 831,313131\ldots$ donc $100a - a = 823 \implies a = \dfrac{823}{99} \in \mathbb{Q}$.

De la même manière,

1. $b = \dfrac{41}{33}$.
2. $c = \dfrac{342229}{2775}$.
3. $d = \dfrac{1}{7}$.
4. $e = 1$.

Exercice 2 : Montrer que :

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
2. $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$

Correction :

1. Supposons le contraire *i.e.* $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = r$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

   Alors $\sqrt{3} + \sqrt{6} = r - \sqrt{2}$.

   En élevant au carré, $3 + 6\sqrt{2} + 6 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2 \iff (6 + 2r)\sqrt{2} = r^2 - 7$.

   Comme $r \geqslant 0$ alors $6 + 2r \neq 0$.

   On en déduit que $\sqrt{2} = \dfrac{r^2 - 7}{6 + 2r}$.

   Or,

   — la somme de deux rationnels est un rationnel ;
   — le produit de deux rationnels est un rationnel ;
   — le quotient de deux rationnels (avec un dénominateur non nul) est un rationnel.

   Donc $\sqrt{2} = \dfrac{r^2 - 7}{6 + 2r} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas.

   Conclusion : $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

2. De la même manière supposons que $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}=r\in\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}=r &\iff 5=r^3+3r^2\sqrt[4]{3}+3r\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt[4]{3}\\
&\iff 5-r^3-3r\sqrt{3}=\sqrt[4]{3}\left(3r^2+\sqrt{3}\right)\\
&\iff \left(5-r^3\right)^2+27-6r\sqrt{3}\left(5-r^3\right)=\sqrt{3}\left(9r^4+3+6r^2\sqrt{3}\right)\\
&\iff \left(5-r^3\right)^2+27-18r^2=6r\sqrt{3}\left(5-r^3\right)+\sqrt{3}\left(9r^4+3\right)\\
&\iff \sqrt{3}=\frac{\left(5-r^3\right)^2+27-18r^2}{6r\left(5-r^3\right)+9r^4+3}\in\mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel, on obtient notre contradiction.

II/ Divisibilité

Exercice 3 : Déterminer les entiers naturels n et m qui vérifient :

1. $n^2+n=20$.
2. $n^2+2n=35$.
3. $n^2-m^2=9$.
4. $nm-5n-5m-7=0$.

Correction :

3. Il est naturel de factoriser : $n^2-m^2=(n-m)(n+m)$.

   Ainsi, $n-m$ et $n+m$ sont nécessairement des diviseurs de 9.

   Or, l'ensemble des diviseurs naturels de 9 sont 1, 3 et 9.

   On réduit encore le champ d'investigation en remarquant que comme n^2-m^2 est positif, avec n et m positifs alors nécessairement $n>m$. On en déduit alors que $n-m$ et $n+m$ sont positifs, et $n-m\leqslant n+m$.

   Il ne reste plus qu'à étudier les différentes possibilités :
   — Si $n-m=1$ alors $n+m=9$, d'où $n=5$ et $m=4$.
   — Si $n-m=3$ alors $n=m=3$ d'où $n=3$ et $m=0$.

   Finalement, il ne reste que deux couples solutions possibles : $(5;4)$ et $(3;0)$

   Comme on a raisonné par condition nécessaire, on vérifie que ces couples sont solutions du problème.

   Conclusion : $\mathscr{S}=\{(5;4);\ (3;0)\}$.

Exercice 4 : Déterminer les entiers n tels que :

1. 7 divise $n+3$.
2. $2n-5$ divise 6.
3. $2n-3$ divise $n+5$.
4. $n+1$ divise $3n-4$
5. $n+3|n+9$.

Correction :

1. 7 divise $n+3$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n+3=7k$, soit $n=7k+3$.
   L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S}=\{7k-3,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Les points à coordonnées entières de la droite passant par $(0\,;-3)$ et de coefficient directeur 7.
2. Les diviseurs de 6 sont -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3 et 6.

   On résout les différentes équations sous la condition $2n-5\leqslant 6$ et on trouve comme solutions : $\mathscr{S}=\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.
3. Si n un entier tel que $2n-3$ divise $n+5$ alors $2n-3$ divise aussi $2n+10$ et aussi la différence $(2n+10)-(2n-3)=13$.

   Les diviseurs de 13 sont -13, -1, 1 et 13. On en déduit que n vaut -5, 1, 2 ou 8.

   Réciproquement, ces nombres sont tels que $2n-3|n+5$.

   On obtient : $\mathscr{S}=\{-5,\ 1,\ 2\,8\}$.

Exercice 5 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que 2 divise $n(n+1)$.
2. Montrer que 3 divise $n(n+1)(n+2)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel a, 6 divise $a(a^2-1)$.

Exercice 6 : Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, 10^n-1 est divisible par 9.

Correction : Première façon de faire : Procédons par récurrence, en définissant (P_n) : « $9\mid 10^n-1$ » pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n=1$, on a $10^1-1=9$, donc est divisible par 9 : (P_1) est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que (P_n) est vraie. Il existe donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $10^n-1=9k$. Ainsi,

$$10^{n+1}-1=10\cdot 10^n-1=10(1+9k)-1=10+9\cdot 10k-1=9(1+10k)=9k',$$

en posant $k'=1+10k\in\mathbb{N}$. Ceci montre que $9\mid 10^{n+1}-1$ donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'où :

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\quad 9\mid 10^n-1.}$$

Deuxième façon de faire : Rappelons l'identité : $\forall\ (a,b)\in\mathbb{C}^2,\quad \forall\ n\in\mathbb{N}^*,\quad a^n-b^n=(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}$.
Ici, on obtient :

$$10^n-1=(10-1)\sum_{k=0}^{n-1}10^k\cdot 1^{n-1-k}=9\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}10^k}_{\in\mathbb{N}}\quad\text{donc est divisible par 9.}$$

Exercice 7 : Prouver que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la fraction $\dfrac{21m+4}{14m+3}$ est irréductible.

Exercice 8 :

1. La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels ?
2. Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.
3. Trouver les entiers naturels n qui, divisés par 4, donnent un quotient égal au reste.
4. Le quotient d'un entier naturel x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ?

   En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.
5. Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+3$?

Même question avec $(n+5)^2$ et $n+3$.

Exercice 10 : Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, le nombre $n^4 - 8n^2 + 4$ n'est pas premier.

Correction :

$$\begin{aligned} n^4 - 8n^2 + 4 &= (n^4 - 4n^2 + 4) - (4n^2) \\ &= (n^2-2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n - 2)(n^2 + 2n - 2) \\ &= [(n-1)^2 - 3][(n+1)^2 - 3] \end{aligned}$$

Dès que $n \geqslant 4$, les deux nombres $(n-1)^2 - 3$ et $(n+1)^2 - 3$ sont des diviseurs de $n^4 - 8n^2 + 4$ strictement supérieurs à 1.

Donc $\forall\, n \geqslant 4, \quad n^4 - 8n^2 + 4 \notin \mathbb{P}$.

Exercice 11 : Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n.

Correction : On doit aborder ce genre d'exercice comme une chasse au trésor en lisant et utilisant **toutes** les informations de l'énoncé.

L'entier n a 15 diviseurs. Il faut donc connaître toutes les décompositions de 15 en facteurs supérieurs à 1. Il n'y a que 2 décompositions soit en un seul facteur 15, soit en deux facteurs 3×5.

Arithmétique

On sait que n est divisible par 6, il est donc divisible par 2 et par 3. Donc n admet 2 facteurs premiers. Comme 15 ne peut se décomposer en plus de 2 facteurs, alors n ne peut admettre que 2 facteurs premiers 2 et 3. On a donc :

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta.$$

Comme $15 = 3 \times 5$, on a alors : $(1+\alpha)(1+\beta) = 3 \times 5$.

On trouve alors deux solutions : $\alpha = 2$ et $\beta = 4$ ou $\alpha = 4$ et $\beta = 2$.

On sait de plus que n n'est pas divisible par $8 = 2^3$, donc α est inférieur à 3.

Le nombre n cherché est donc :

$$n = 2^2 3^4 = 4 \times 81 = 324.$$

Exercice 12 : Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.

Correction : Posons n l'entier cherché.

On cherche d'abord toutes les décompositions de 28 en facteurs supérieurs à 1. On peut décomposer 28 en 1, 2 ou 3 facteurs :

$$28 \quad \text{ou} \quad 2 \times 14 \quad \text{ou} \quad 4 \times 7 \quad \text{ou} \quad 2 \times 2 \times 7.$$

1. En 1 facteur :

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 28$ soit $\alpha = 27$.

   D'où, $n = 2^{27} = 134217728$.
2. En deux facteurs : $28 = 2 \times 14$.

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha + 1 = 14$ et $\beta + 1 = 2$. [1]

   On a donc $\alpha = 13$ et $\beta = 1$.

   D'où, $n = 2^{13} \times 3 = 24576$.
3. En deux facteurs : $28 = 4 \times 7$.

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha + 1 = 7$ et $\beta + 1 = 4$.

   On trouve alors $\alpha = 6$ et $\beta = 3$.

   D'où, $n = 2^6 \times 3^3 = 1728$.
4. En trois facteurs : $28 = 2 \times 2 \times 7$.

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ avec $\alpha + 1 = 7$, $\beta + 1 = 2$ et $\gamma + 1 = 2$.

   On trouve alors $\alpha = 6$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.

   D'où $n = 2^6 \times 3 \times 5 = 960$.

Arithmétique

Le plus petit entier naturel ayant 28 diviseurs est donc 960.

Un peu d'histoire : *Un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres est parfait. Un diviseur propre est un diviseur autre que le nombre lui-même.*

Le premier nombre parfait est 6. *En effet* 1, 2 *et* 3 *sont les diviseurs propres de* 6 *et* $1+2+3=6$.

- 28 *est également un nombre parfait :* $1+2+4+7+14=28$.
- *Les nombres parfaits sont rares, il n'en existe que trois inférieurs à* 1000 *qui sont* 6 ,28 *et* 496.

  Ensuite vient 8 128 , puis 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128 (découvert par Leonhard Euler), 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176, ...
- *Actuellement,* 51 *nombres parfaits sont connus. Le plus grands possède 12 640 858 chiffres et est égal à :*

$$2^{20996010}\left(2^{20996011-1}\right).$$

  Comme pour le plus grand nombre premier, c'est le projet GIMPS qui détient le record.

Dans le IX$^{\text{ème}}$ *livre des Éléments, Euclide d'Alexandrie* $(-320?;-260$ *?) expose une façon de générer des nombres parfaits. C'est le propos de l'exercice suivant :*

Exercice 13 (Théorème d'Euclide) :

1. **(Exemples)** Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombre parfait :

   « Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1}-1)$ et si $2^{n+1}-1$ est premier, alors a est parfait ».

   Trouver alors les quatre premiers nombres parfaits. (On ne demande pas de prouver la règle).
2. **(Démonstration)** On pose $a=2^n(2^{n+1}-1)$ et on suppose que $2^{n+1}-1$ est premier.
   (a) Quelle est la décomposition de a en facteurs premiers ?
   (b) En déduire la liste des diviseurs de a.
   (c) Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts de a est égale à ce nombre a.

Remarque : Le problème de savoir s'il existe des nombres parfaits impairs n'est toujours pas résolu.

Exercice 14 : Montrer que l'intervalle $[\![n!+2, n!+n]\!]$ (pour $n \geqslant 2$) ne contient aucun nombre premier.

III/ PGCD et PPCM

Exercice 15 : Déterminer le PGCD de 8870 et de 3120.

Exercice 16 :

1. Calculer $598 \wedge 84$.
2. Réduire la fraction $\dfrac{1764}{945}$.
3. Calculer $186 \vee 33$ et $280 \vee 100$.

Correction :

1. $598 \wedge 84 = 2$.
2. $1764 \wedge 945 = 63$.

   Donc $\dfrac{1764}{945} = \dfrac{63 \times 28}{63 \times 15} = \dfrac{28}{15}$.
3. $186 \wedge 33 = 3$ donc $186 \vee 33 = \dfrac{186 \times 33}{3} = 2046$.

   $280 \wedge 100 = 20$ donc $280 \vee 100 = \dfrac{280 \times 100}{20} = 1400$.

Exercice 17 : Déterminer, suivant les valeurs de $n \geqslant 3$ le PGCD de $5n - 9$ et $2n - 6$.

Correction : $5n - 9 = 2 \times (2n - 6) + (n + 3)$.

Donc,

$$(5n - 9) \wedge (2n - 6) = (2n - 6) \wedge (n + 3).$$

$(2n - 6) = 2 \times (n + 3) - 12$.

Donc,

$$(2n - 6) \wedge (n + 3) = (n + 3) \wedge 12$$

D'où,

$$(5n - 9) \wedge (2n - 6) = (n + 3) \wedge 12.$$

Exercice 18 : Calculer $(15a + 4b) \wedge (11a + 3b)$ en fonction de $a \wedge b$.

Correction : $(15a + 4b) = 1 \times (11a + 3b) + (4a + b)$.

Donc,

$$(15a + 4b) \wedge (11a + 3b) = (11a + 3b) \wedge (4a + b)$$

$(11a + 3b) = 2 \times (4a + b) + (3a + b)$.

Donc,

$$(11a + 3b) \wedge (4a + b) = (4a + b) \wedge (3a + b)$$

$(4a + b) = 1 \times (3a + b) + a$. Donc

$$(4a + b) \wedge (3a + b) = (3a + b) \wedge a.$$

$(3a + b) = 3 \times a + b$. Donc

$$(3a + b) \wedge a = a \wedge b.$$

D'où,

$$(15a + 4b) \wedge (11a + 3b) = a \wedge b.$$

Exercice 19 : Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a \leqslant b$ vérifiant :

$$a + b = 256 \text{ et } a \wedge b = 16.$$

Correction : Comme $a \wedge b = 16$, on peut écrire : $\begin{cases} a = 16\alpha \\ b = 16\beta \end{cases}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

$a + b = 256 \iff 16(\alpha + \beta) = 256 \iff \alpha + \beta = 16$.

Par élimination, les couples (α, β) sont $(1, 15), (3, 13), (5, 11), (7, 9)$.

Les solutions sont donc

$$(16, 240), (48, 208), (80, 176), \text{ et } (112, 144).$$

Exercice 20 : Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $x + y = 84$ et $(x \wedge y)^2 = (x \vee y)$.

Correction : Soit $d = x \wedge y$. On peut écrire $\begin{cases} a = d\alpha \\ b = d\beta \end{cases}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

On a

— $d^2 = \dfrac{xy}{d}$ *i.e.* $d^2 = \dfrac{d^2\alpha\beta}{d}$ *i.e.* $d = \alpha\beta$.
— $d(\alpha + \beta) = 84$ donc $d|84$ *i.e.* $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$

On a donc $\begin{cases} \alpha\beta = d \\ \alpha + \beta = \dfrac{84}{d} \end{cases}$. α et β sont donc racines de $X^2 - \dfrac{84}{d}X + d$.

Le discriminant $X^2 - \dfrac{84}{d}X + d$ est $\Delta = \left(\dfrac{84}{d}\right)^2 - 4d = \dfrac{84^2 - 4d^3}{d^2}$. Il est nécessairement positif *i.e.* $0 \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{42^2} \simeq 12,1$.

Remarque : On n'est pas assuré que $\dfrac{84}{d}$ soit pair donc on ne peut prendre le discriminant réduit pour ceux qui seraient tentés.

d	1	2	3	4	6	7	12
$\dfrac{84}{d}$	84	42	28	21	14	12	7
$\dfrac{84^2 - 4d^3}{d^2}$	7052	1756	772	$\notin \mathbb{N}$	172	116	1
$\sqrt{\Delta}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	1

La seule possibilité pour avoir $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ est donc $d = 12$ qui donne les solutions $\dfrac{\frac{84}{d} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2}$.

En conclusion $\{\alpha, \beta\} = \{3, 4\}$:

Les solutions sont donc $(36, 48)$ et $(48, 36)$.

Exercice 21 : Déterminer deux entiers naturels a et b connaissant leur produit 1512 et leur ppcm 252.

Correction : Posons $d = a \wedge b$.

Comme $252 \times d = ab$. Donc $d = 6$.

Posons $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

On a alors $35a'b' = 1512$ d'où $a'b' = 42$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, le couple (a', b') ne peut être égal qu'à :

$$(1;42),\ (2;21),\ (3.14),\ (6.7),\ (7;6),\ (14,3),\ (21;2),\ \text{ou } (42;1).$$

On multiplie par 6 pour avoir tous les couples solutions.

Exercice 22 : Soient d et m, respectivement le pgcd et le ppcm de deux naturels a et b.

Déterminer a et b tels que $m - 2d = 11$.

Correction : Posons toujours $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

Comme $md = ab$, on a $md = d^2a'b'$ puis $m = da'b'$.

La relation donnée s'écrit ainsi $da'b' - 2d = 11$.
$d(a'b' - 2) = 11$

D'où d, positif, divise 11. Il ne peut être égal qu'à 11 ou 1.

— Si $d = 11$, alors $a'b' - 2 = 1$ et $a'b' = 3$. Donc $(a', b') = (1, 3)$ ou $(3, 1)$ et $(a, b) = (11, 33)$ ou $(33, 11)$.
— Si $d = 1$, alors $a'b' = 13$ et $(a', b') = (1, 13)$ ou $(13, 1)$. Alors $(a, b) = (13, 1)$ ou $(1, 13)$.

On trouve donc 4 couples solutions.

Exercice 23 : On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que
$$\forall n \geqslant 1, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$
2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathrm{N}^*, \quad F_{n+p} = F_nF_{p-1} + F_{n+1}F_p.$$
En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p}.
4. Montrer que $\forall n, m > 2, \quad F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.
5. Montrer que, si $n > 5$ et F_n est premier, alors n est premier.

   La réciproque est-elle vraie ?
6. Vérifier que F_8 est le premier terme non nul de la suite divisible par 7 , puis montrer que F_n est divisible par 7 si et seulement si n est un multiple de 8. (Indication : On pourra calculer dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.)