Arithmétique

I/ Questions de cours

Compléter :

Théorème 3 :
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b. \tag{II.1}$$

Lorsqu'on a obtenu cette écriture, on dit qu'on a effectué la *division euclidienne* de a par b.

Proposition 15 :
Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}$.

Alors,

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Théorème 16 :
Soient a et b deux entiers non nuls.

Les multiples communs de a et b sont **exactement** les multiples de $\operatorname{ppcm}(a\,;b)$:

$$\operatorname{ppcm}(a\,;b)\,|m \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a|m \\ b|m \end{cases}$$

Arithmétique

II/ Quelques calculs élémentaires

1. Calculer $1092 \wedge 2652$.

   Un peu long de trouver la décomposition en facteurs premiers donc algorithme d'Euclide même si l'on voit aisément que ces deux nombres sont au moins divisibles par 4 et 3 donc 12.

$$\begin{aligned} 2652 &= 1092 \times 2 + 468 \\ 1092 &= 468 \times 2 + 156 \\ 468 &= 156 \times 3 + 0. \end{aligned}$$

   Donc $1092 \wedge 2652 = 156$ $(= 12 \times 13)$.

2. Calculer $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} + \dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$.

$$\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} + \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} + \frac{6^2 \times 3 \times 5^2}{5^2 \times 6 \times 2} = \frac{3^4}{3^3} + \frac{2 \times 3^2}{2} = 3 + 9 = 12.$$

3. Simplifier $\dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$.

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{2n(n-1)(n-1)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

4. Calculer $\dfrac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)}$.

$$\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)} = \frac{2022}{(2022)^2 + (1-2022) \times (1+2022)} = \frac{2022}{(2022)^2 + 1 - 2022^2} = 2022.$$

III/ QCM

1. Le PPCM de 12 et 18 est :

   (a) ☐ 24 (b) ☑ 36 (c) ☐ 48 (d) ☐ 72

2. Pour un entier impair n, $n^2 - 1$ est toujours divisible par :

   (a) ☐ 3 (b) ☐ 6 (c) ☑ 4 (d) ☐ 9

3. Un entier n est multiple de 9 si :

   (a) ☐ Il est impair.
   (b) ☑ La somme de ses chiffres est un multiple de 9.
   (c) ☐ Il est divisible par 3.
   (d) ☐ Il se termine par 9.

4. L'ensemble des nombres premiers est :

(a) ☐ Fini
(b) ☑ Infini
(c) ☐ Limité
(d) ☐ Un sous-ensemble des nombres pairs

5. Le plus grand facteur premier de 90 est :

(a) ☐ 2
(b) ☐ 3
(c) ☑ 5
(d) ☐ 7

6. Si a et b sont premiers entre eux, alors :

(a) ☑ $\text{pgcd}\,(a\,;b) = 1$
(b) ☐ a divise b
(c) ☐ a et b sont pairs
(d) ☐ $a \times b$ est premier

7. Le reste de la division de 2023 par 7 est :

(a) ☑ 0
(b) ☐ 1
(c) ☐ 2
(d) ☐ 3

8. L'algorithme du crible d'Ératosthène sert à :

(a) ☑ Tester la primalité d'un nombre
(b) ☐ Calculer le PGCD
(c) ☐ Déterminer le PPCM
(d) ☐ Vérifier la divisibilité par 7

9. Quel est le plus petit multiple commun de 4 et 6 ?

(a) ☐ 2
(b) ☑ 12
(c) ☐ 16
(d) ☐ 24

Arithmétique

I/ Questions de cours

Compléter :

Théorème 5 (Critère d'arrêt) :

— Tout entier naturel n, $n \geqslant 2$, admet un diviseur premier.

— Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que :

$$2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}.$$

Théorème 12 :
Soient a et b deux entiers non nuls.

Les diviseurs communs de a et b sont **exactement** les diviseurs de $\operatorname{pgcd}(a\,;b)$:

$$d|\operatorname{pgcd}(a\,;b) \iff \begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases}$$

Proposition 18 :
Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\beta_p}$.

Alors,

$$a \vee b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.$$

Arithmétique

II/ Quelques calculs élémentaires

1. Calculer $595 \wedge 805$.

   Un peu long de trouver la décomposition en facteurs premiers donc algorithme d'Euclide même si l'on voit aisément que ces deux nombres sont au moins divisibles par 5.

$$\begin{aligned}805 &= 595 \times 1 + 210\\ 595 &= 210 \times 2 + 175\\ 210 &= 175 \times 1 + 35\\ 175 &= 35 \times 5 + 0.\end{aligned}$$

   Donc $595 \wedge 805 = 35$ $(= 5 \times 7)$.

2. Calculer $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} + \dfrac{8^7 \times 6^{-9}}{27^{-3} \times 2^{11}}$.

$$\frac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} + \frac{8^7 \times 6^{-9}}{27^{-3} \times 2^{11}} = \frac{(3+1)\times 3^{21}}{(3-1)\times 3^{21}} + \frac{2^{21}\times 2^{-9}\times 3^{-9}}{3^{-9}\times 2^{11}} = \frac{4}{2} + 2^1 = 4.$$

3. Factoriser l'expression $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$.

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + (n+1)(n-n-1)}{n(n+1)^2} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

4. Calculer $\dfrac{2021^2}{2020^2 + 2022^2 - 2}$.

   Il suffit de remarquer $a^2 - b^2$ qui vous tend les bras.

$$\begin{aligned}\frac{2021^2}{2020^2+2022^2-2} &= \frac{2021^2}{2020^2-1+2022^2-1} = \frac{2021^2}{2019\times 2021 + 2021\times 2023} = \frac{2021}{2019+2023}\\ &= \frac{2021}{2021-2+2021+2} = \frac{2021}{2\times 2021} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

III/ QCM

1. Quelle est la définition de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$?

   (a) ☑ a divise b si $b = ka$ pour un entier k.
   (b) ☐ a divise b si a est supérieur à b.
   (c) ☐ a divise b si $a + b$ est pair.
   (d) ☐ a divise b si a est un nombre premier.

2. L'ensemble des diviseurs de 12 est :

   (a) ☑ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
   (b) ☐ $\{1, 2, 3, 6, 12\}$
   (c) ☐ $\{1, 2, 3, 5, 12\}$
   (d) ☐ $\{1, 3, 4, 6, 12\}$

3. Quel est le plus petit nombre premier ?

(a) ☐ 1 (b) ☑ 2 (c) ☐ 3 (d) ☐ 5

4. Le PGCD de 24 et 18 est :

(a) ☐ 4 (b) ☑ 6 (c) ☐ 8 (d) ☐ 12

5. Un nombre premier est un nombre qui :

(a) ☐ Est divisible par 1 et lui-même uniquement.
(b) ☐ Est pair et supérieur à 2.
(c) ☐ Est divisible par 3 uniquement.
(d) ☑ Possède exactement deux diviseurs.

6. La décomposition en facteurs premiers de 120 est :

(a) ☐ $2^2 \times 3^2 \times 5$ (b) ☐ $2^4 \times 3$ (c) ☑ $2^3 \times 3 \times 5$ (d) ☐ $2^3 \times 5^2$

7. La division euclidienne de 83 par 7 donne :

(a) ☐ Quotient $= 12$, reste $= 1$
(b) ☐ Quotient $= 11$, reste $= 6$
(c) ☑ Quotient $= 11$, reste $= 5$
(d) ☐ Quotient $= 10$, reste $= 3$

8. L'algorithme d'Euclide est utilisé pour :

(a) ☐ Trouver la somme des chiffres d'un nombre.
(b) ☐ Factoriser un nombre en nombres premiers.
(c) ☑ Calculer le plus grand diviseur commun.
(d) ☐ Déterminer le plus petit multiple commun.

9. Si $a|b$ et $b|c$, alors :

(a) ☑ $a|c$ (b) ☐ $c|a$ (c) ☐ $a \times c = b$ (d) ☐ $b|a$