Fonctions de référence

I/ Calculs, équations et limites

Exercice 1 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{4}{5}$.

   À partir de quel indice n a-t-on $u_n \leqslant 10^{-3}$?
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n \geqslant 10^9$.

Exercice 2 : Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x^2 + x + 1$
2. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 19x - 7$ par $x^2 + 3x - 1$
3. $x^5 - x^2 + 2$ par $x^2 + 1$

Exercice 3 : Factoriser les expressions polynomiales suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(x) &= \frac{1}{4}x^2 + x + 1 & \mathrm{E}(x) &= x^3 + 1\\
\mathrm{B}(x) &= x^2 - 16 + (x-4)(5x+7) & \mathrm{F}(x) &= x^4 + 2x^2 + 1\\
\mathrm{C}(x) &= 5x^2 - 2x - 3 & \mathrm{G}(x) &= x^4 + 1\\
\mathrm{D}(x) &= x^2 + 3x + 1 & \mathrm{H}(x) &= 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x - 2
\end{aligned}$$

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(0,5) + \ln(2)$
2. $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$
3. $\mathrm{e}^{-5\ln 2}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{3\ln 5 - 1}}{\mathrm{e}^{2+\ln 5}}$
5. $\dfrac{2e}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
6. $3\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right) + 4e^{-5\ln \mathrm{e}^2}$
7. $-5e^{-4} \times (\sqrt{\mathrm{e}})^3 \times 2e^2$
8. $(0,25)^{(1,5)}$
9. $\sqrt[3]{2^4}\sqrt[3]{2^6}$
10. $\ln\left(\sqrt{10}+3\right)^4 + \ln\left(\sqrt{10}-3\right)^4$
11. $\mathrm{e}^{-10x+2} \times \left(\mathrm{e}^{-x-2}\right)^{-2} \times \left(\mathrm{e}^{3x-2}\right)^3$
12. $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}$
13. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$
14. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$

Fonctions de référence

Exercice 5 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur un domaine à préciser :

1. $\ln(-2-3x) \geqslant 0$
2. $\exp(-2x+1) > 0$
3. $\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11)$
4. $\ln\left(\frac{3}{x}\right) > \ln 3$
5. $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$
6. $\mathrm{e}^x - 3\,\mathrm{e}^x - 4 = 0$
7. $(\ln(x)-3)(\ln(x)+1) = 0$
8. $\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$
9. $\dfrac{\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x-1} > 0$
10. $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0$
11. $\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1} = 1$
12. $2^x = 3^{2x+1}$
13. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$
14. $5^{1-3x} = \dfrac{1}{125}$
15. $4^x - 6^x = 2 \times 9^x$
16. $2^{2x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geqslant 0$
17. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
18. $2^{x^3} = 3^{x^2}$
19. $2^{2x^2} \leqslant 2^{x+1}$
20. $\mathrm{ch}\,(x) = 2.$
21. $5\mathrm{ch}\,(x) - 4\mathrm{sh}\,(x) = 3$

Exercice 6 : Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant le système d'équations.

1. $\begin{cases} x+y = 25 \\ \ln(x)+\ln(y) = \ln(100) \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2 = 169 \\ \ln(x)+\ln(y) = \ln(60) \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4\left(\log_x(y)+\log_y(x)\right) = 17 \\ xy = 243 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 7\left(\log_x(y)+\log_y(x)\right) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$

Exercice 7 (Trigonométrie hyperbolique) : Soient a et b deux réels.

Montrer que :

1. Formule d'addition :

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).$$
$$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).$$

2. Formule de linéarisation : $\mathrm{ch}^2(a) = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2a)+1}{2}$ et $\mathrm{sh}^2(a) = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2a)-1}{2}$.
3. Formule de duplication : $\mathrm{sh}\,(2a) = 2\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(a)$ et $\begin{aligned}[t] \mathrm{ch}\,(2a) &= \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a) \\ &= 2\mathrm{ch}^2(a) - 1 \\ &= 1 + 2\mathrm{sh}^2(a). \end{aligned}$
4. Formule de (factorisation par) l'angle moitié

$$\mathrm{ch}\,(a) + \mathrm{ch}\,(b) = 2\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\,(a) - \mathrm{ch}\,(b) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$
$$\mathrm{sh}\,(a) + \mathrm{sh}\,(b) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a) - \mathrm{sh}\,(b) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

II/ Étude de fonctions

Exercice 8 : On pose $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$

Représenter l'allure des courbes des fonctions définies par $x \longmapsto f(x)-3$, $x \longmapsto f(x-2)$, $x \longmapsto f(2+x)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{2}f(x)$ et $x \longmapsto f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 9 : Étudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto \dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$

$g : x \longmapsto \dfrac{3-5x}{-x^2-x+2}$

$h : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

$i : x \longmapsto \dfrac{3x^2-x-2}{x^2-1}$

$j : x \longmapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$

$k : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

$l : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x+1}$

$m : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

$n : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{3x-1}$

$o : x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}$

$p : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{1-x}$

$q : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x+1}}$

$r : x \longmapsto \sqrt{x}\ln(x)$

$s : x \longmapsto \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

$t : x \longmapsto \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

$u : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)$

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x^2+1}$.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique (Δ) en $\pm\infty$ dont on précisera l'équation.
3. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de (Δ).

Remarque : Une fraction rationnelle admet une *asymptote oblique* si, et seulement si son degré est égal à 1.

Exercice 11 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+4}{x-1}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall\, x \neq 1,\ f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.
2. En déduire les asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 12 :

1. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{sh}(x) \geqslant x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) \geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$.

Fonctions de référence

Exercice 13 : Dans chaque cas, calculer la dérivée en précisant rapidement le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes définies par :

$$f_1(x) = \exp(x)\sin(x)$$
$$f_2(x) = e^{\frac{1}{x}}$$
$$f_3(x) = \ln(1-5x)$$
$$f_4(x) = \ln(3x^2-5x+7)$$
$$f_5(x) = \ln^3(1+2x)$$
$$f_6(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$
$$f_7(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$
$$f_8(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$f_9(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$f_{10}(x) = \frac{3-2\ln(x)}{x-1}$$
$$f_{11}(x) = \sqrt{\ln(x)}$$
$$f_{12}(x) = (2-\ln(x))(1-\ln(x))$$
$$f_{13}(x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$
$$f_{14}(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$$
$$f_{15}(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Exercice 14 : En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f: \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2-1} \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{\ln(x)} \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-x \end{array}$
5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}$
6. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} \end{array}$
7. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;3[\\ x & \longmapsto & \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}} \end{array}$

Exercice 15 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la relation :

$$\forall\, x,y \in\,]0\,;+\infty[\,,\; f(xy) = f(x)+f(y), \tag{IV.1}$$

1. Déterminer $f(1)$.
2. Montrer que $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\beta}{x}$ pour un certain réel $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.
3. En déduire que $f = \beta\ln$.
4. Montrer que toute fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la relation (IV.1) est proportionnelle à la fonction logarithme népérien.

Exercice 16 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R},\; f(x+y) = f(x)\times f(y), \tag{IV.2}$$

1. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $f(0)$.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre à préciser.

4. En déduire que toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (IV.2) est une puissance de l'exponentielle de base e *i.e.* s'écrit sous la forme :

$$f(x) = (\mathrm{e}^x)^k = \mathrm{e}^{kx}, \text{ où } k \text{ est un réel quelconque.}$$

Exercice 17 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité et tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Exercice 18 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = |\ln|x||$.

1. Domaine de définition et domaine d'étude.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité. Dérivabilité en 1 et -1.Tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Exercice 19 : Soit f l'application définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^{x+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

   En utilisant la fonction auxiliaire $\varphi(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x} + 1$, déterminer le signe de $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.
4. (a) Démontrer que f établit une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans lui-même.
   (b) Sans aucun calcul, donner les propriétés de l'application réciproque f^{-1} (continuité, dérivabilité, variations). Préciser les valeurs $\left(f^{-1}\right)'(1)$ et $\left(f^{-1}\right)'(8)$.
5. Représenter dans un même repère orthonormal f et f^{-1}.

Exercice 20 : Étude complète de la fonction th définie par $\mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$.

On montrera, notamment, que la fonction th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser et on s'interrogera sur la dérivabilité de sa réciproque.

Bonus : Simplifier les expressions $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{ch}\,(\ln(x)) + \mathrm{sh}\,(\ln(x))}{x}$ et $\mathrm{B} = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{th}\,(x)}{1-\mathrm{th}\,(x)}}\right)$.