Fonctions de référence

I/ Calculs, équations et limites

Exercice 1 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{4}{5}$.

   À partir de quel indice n a-t-on $u_n \leqslant 10^{-3}$?
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n \geqslant 10^9$.

Correction :

1. Par définition, on a $u_n = u_0 \times q^n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

   Il suffit donc de résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \leqslant 10^{-3}$.

   Comme tous les nombres sont strictement positifs, cette équation est équivalente à

   $$n \ln\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant -3\ln 10$$
   $$n \geqslant -\frac{3\ln 10}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \qquad\qquad \frac{4}{5} < 1 \iff \ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0!!!$$

   De tête, $-\dfrac{3\ln 10}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq 30,96$.

   Donc, le plus petit indice cherché est $n = 31$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n = \dfrac{5^{n+1} - 1}{4}$ d'où,

   $$\begin{aligned} 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n \geqslant 10^9 &\iff 5^{n+1} \geqslant 4 \times 10^9 + 1 \\ &\iff n \geqslant \log_5\left(4 \times 10^9 + 1\right) - 1 \simeq 12,7 \\ &\iff n \geqslant 13. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x^2 + x + 1$
2. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 19x - 7$ par $x^2 + 3x - 1$
3. $x^5 - x^2 + 2$ par $x^2 + 1$

Exercice 3 : Factoriser les expressions polynomiales suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{4}x^2+x+1 \\ B(x) &= x^2-16+(x-4)(5x+7) \\ C(x) &= 5x^2-2x-3 \\ D(x) &= x^2+3x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= x^3+1 \\ F(x) &= x^4+2x^2+1 \\ G(x) &= x^4+1 \\ H(x) &= 2x^4+x^3-4x^2+3x-2 \end{aligned}$$

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(0,5)+\ln(2)$
2. $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$
3. $\mathrm{e}^{-5\ln 2}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{3\ln 5-1}}{\mathrm{e}^{2+\ln 5}}$
5. $\dfrac{2e}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
6. $3\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)+4e^{-5\ln \mathrm{e}^2}$
7. $-5e^{-4}\times(\sqrt{\mathrm{e}})^3\times 2e^2$
8. $(0,25)^{(1,5)}$
9. $\sqrt[3]{2^4}\sqrt[3]{2^6}$
10. $\ln\left(\sqrt{10}+3\right)^4+\ln\left(\sqrt{10}-3\right)^4$
11. $\mathrm{e}^{-10x+2}\times\left(\mathrm{e}^{-x-2}\right)^{-2}\times\left(\mathrm{e}^{3x-2}\right)^3$
12. $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}$
13. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$
14. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$

Exercice 5 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur un domaine à préciser :

1. $\ln(-2-3x)\geqslant 0$
2. $\exp(-2x+1)>0$
3. $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$
4. $\ln\left(\dfrac{3}{x}\right)>\ln 3$
5. $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)\geqslant 0$
6. $\mathrm{e}^x-3\,\mathrm{e}^x-4=0$
7. $(\ln(x)-3)(\ln(x)+1)=0$
8. $\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^{-x}+1=0$
9. $\dfrac{\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x-1}>0$
10. $\mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^x-3\geqslant 0$
11. $\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1}=1$
12. $2^x=3^{2x+1}$
13. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{3}{2}$
14. $5^{1-3x}=\dfrac{1}{125}$
15. $4^x-6^x=2\times 9^x$
16. $2^{2x+1}-10\times 2^x+12\geqslant 0$
17. $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$
18. $2^{x^3}=3^{x^2}$
19. $2^{2x^2}\leqslant 2^{x+1}$
20. $\mathrm{ch}\,(x)=2.$
21. $5\mathrm{ch}\,(x)-4\mathrm{sh}\,(x)=3$

Exercice 6 : Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant le système d'équations.

1. $\left\{\begin{array}{l} x+y=25 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(100)\end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=169 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(60)\end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} 4\left(\log_x(y)+\log_y(x)\right)=17 \\ xy=243\end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} 7\left(\log_x(y)+\log_y(x)\right)=50 \\ xy=256\end{array}\right.$

Exercice 7 (Trigonométrie hyperbolique) : Soient a et b deux réels.

Montrer que :

1. Formule d'addition :

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).$$
$$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).$$

2. Formule de linéarisation : $\mathrm{ch}^2(a) = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2a)+1}{2}$ et $\mathrm{sh}^2(a) = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2a)-1}{2}$.
3. Formule de duplication : $\mathrm{sh}\,(2a) = 2\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(a)$ et
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,(2a) &= \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a)\\ &= 2\mathrm{ch}^2(a) - 1\\ &= 1 + 2\mathrm{sh}^2(a).\end{aligned}$$
4. Formule de (factorisation par) l'angle moitié

$$\mathrm{ch}\,(a) + \mathrm{ch}\,(b) = 2\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\,(a) - \mathrm{ch}\,(b) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$
$$\mathrm{sh}\,(a) + \mathrm{sh}\,(b) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a) - \mathrm{sh}\,(b) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

II/ Étude de fonctions

Exercice 8 : On pose $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$

Représenter l'allure des courbes des fonctions définies par $x \longmapsto f(x)-3$, $x \longmapsto f(x-2)$, $x \longmapsto f(2+x)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{2}f(x)$ et $x \longmapsto f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 9 : Étudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto \dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$

$g : x \longmapsto \dfrac{3-5x}{-x^2-x+2}$

$h : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

$i : x \longmapsto \dfrac{3x^2-x-2}{x^2-1}$

$j : x \longmapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$

$k : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

$l : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x+1}$

$m : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

$n : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{3x-1}$

$o : x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}$

$p : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{1-x}$

$q : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x+1}}$

$r : x \longmapsto \sqrt{x}\ln(x)$

$s : x \longmapsto \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

$t : x \longmapsto \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

$u : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)$

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2+1}$.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique (Δ) en $\pm\infty$ dont on précisera l'équation.

3. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de (Δ).

Remarque : Une fraction rationnelle admet une *asymptote oblique* si, et seulement si son degré est égal à 1.

Exercice 11 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+4}{x-1}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall\, x \neq 1,\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
2. En déduire les asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 12 :

1. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{sh}(x) \geqslant x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 13 : Dans chaque cas, calculer la dérivée en précisant rapidement le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes définies par :

$$f_1(x) = \exp(x)\sin(x)$$
$$f_2(x) = e^{\frac{1}{x}}$$
$$f_3(x) = \ln(1-5x)$$
$$f_4(x) = \ln(3x^2-5x+7)$$
$$f_5(x) = \ln^3(1+2x)$$
$$f_6(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$
$$f_7(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$
$$f_8(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$f_9(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$f_{10}(x) = \frac{3-2\ln(x)}{x-1}$$
$$f_{11}(x) = \sqrt{\ln(x)}$$
$$f_{12}(x) = (2-\ln(x))(1-\ln(x))$$
$$f_{13}(x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$
$$f_{14}(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$
$$f_{15}(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Exercice 14 : En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f: \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2-1} \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{\ln(x)} \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-x \end{array}$
5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$
6. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x} \end{array}$
7. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;3[\\ x & \longmapsto & \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}} \end{array}$

Exercice 15 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la relation :

$$\forall\, x, y \in \,]0\,;+\infty[\,,\ f(xy) = f(x) + f(y), \tag{IV.1}$$

1. Déterminer $f(1)$.
2. Montrer que $\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\beta}{x}$ pour un certain réel $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.
3. En déduire que $f = \beta \ln$.
4. Montrer que toute fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la relation (IV.1) est proportionnelle à la fonction logarithme népérien.

Correction : Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent.

— Pour $x = y = 1$, on a $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$ (nécessairement).

— Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en dérivant par rapport à $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$xf'(xy) = f'(y).$$

— Pour $y = 1$, on obtient $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x} = \dfrac{\beta}{x}$ où $\beta = f'(1)$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors $f(x) = \beta \ln(x) + \gamma$ où $\gamma = f(1) - \beta \ln(1) = f(1) = 0$.

— En conclusion, on a nécessairement $f(x) = \beta \ln(x)$.

Réciproquement, si f est définie par une expression de la forme $\beta \ln(x)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ alors f vérifie la relation (IV.1).

La relation (IV.1) est une propriété caractéristique des fonctions logarithmes comme fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ la vérifiant.

Ce théorème caractérise le logarithme népérien comme le générateur de toutes les fonctions dérivables vérifiant la relation (IV.1).

L'ensemble de celles-ci est alors une droite vectorielle dirigée par $\ln$.

Exercice 16 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) \times f(y), \tag{IV.2}$$

1. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $f(0)$.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre à préciser.
4. En déduire que toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (IV.2) est une puissance de l'exponentielle de base e *i.e.* s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \left(\mathrm{e}^x\right)^k = \mathrm{e}^{kx}, \text{ où } k \text{ est un réel quelconque.}$$

Correction : Considérons une fonction f vérifiant (IV.2).

— S'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors f est la fonction nulle car, dans ce cas :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x_0) \times f(x - x_0) = 0.$$

— Si f n'est pas la fonction nulle alors elle ne peut donc pas s'annuler et on obtient en particulier :

$$f(x) = f(0) \times f(x) \iff f(0) = 1.$$

— Soit x fixé dans $\mathbb{R}$, en dérivant par rapport à y, on obtient $f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$. Ce qui donne, pour $y = 0$:

$$f'(x) = f'(0) \times f(x) = \lambda f(x).$$

— La fonction f cherchée est donc solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ dont les fonctions $x \longmapsto \exp(\lambda x)$ sont solutions.

Réciproquement, on vérifie que la fonction nulle et les fonctions du type $x \longmapsto \exp(\lambda x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifient la relation (IV.2).

Exercice 17 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité et tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Correction :

1. La fonction f est définie si, et seulement si $1 + \dfrac{1}{x} > 0$ donc

$$\mathscr{D}_f =]-\infty\,; -1[\cup]0\,; +\infty[.$$

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de composées :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{e}.$$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y = \mathrm{e}$.

De même, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X}\ln\left(1+\frac{1}{X}\right) = 0$. D'après les théorèmes sur les limites de composées, on a donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{u=1+\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln u}{u-1} = +\infty$. Par composition, on a donc :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty.$$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $x = -1$.

3. f est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

On ne peut donc pas conclure directement sur le signe de $f'(x)$.

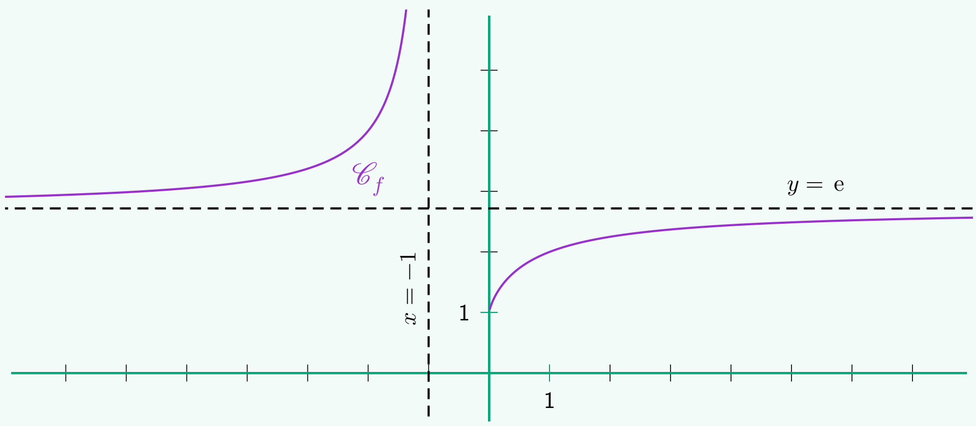
On pose alors $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$ qui est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et où :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

D'où le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	e	$\nearrow$	$+\infty$ ||		|| 1	$\nearrow$	e

On trace les deux asymptotes puis la courbe représentative :



Exercice 18 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = |\ln|x||$.

1. Domaine de définition et domaine d'étude.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité. Dérivabilité en 1 et -1.Tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Correction :

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

   $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

On étudiera donc f seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et on complètera la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées.

2. D'après les théorèmes sur les limites de composées, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$.

   La courbe de f admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote.

3. $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \longmapsto ln\,|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est donc dérivable sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

   Par symétrie, f est dérivable sur $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

   Regardons la limite du taux d'accroissement en 1 :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

   Pour $(-1<)h<0$, $1+h<1$ donc $\ln(1+h)<0$ et $|\ln(1+h)| = -\ln(1+h)$ d'où,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1.$$

   La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Sa courbe y admet deux demi-tangentes de coefficient directeur ± 1.

   Enfin,

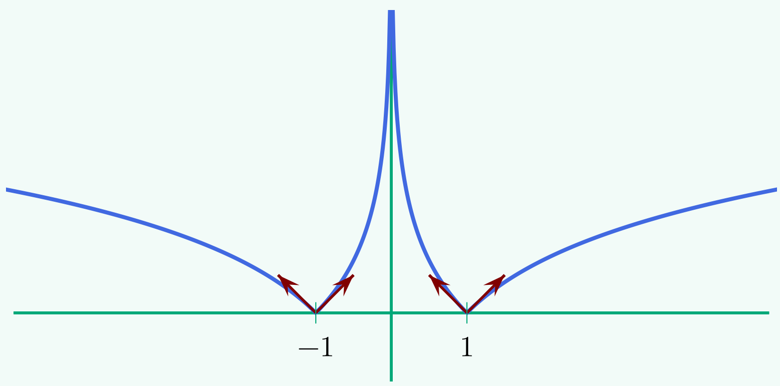
   (a) $\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc, f est strictement croissante.

   (b) $\forall\, x \in]0\,;1[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$. Donc, f est strictement décroissante.

   On en dédit la tableau de variation complet par symétrie :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4.



Exercice 19 : Soit f l'application définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^{x+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

   En utilisant la fonction auxiliaire $\varphi(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x} + 1$, déterminer le signe de $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.
4. (a) Démontrer que f établit une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans lui-même.

   (b) Sans aucun calcul, donner les propriétés de l'application réciproque f^{-1} (continuité, dérivabilité, variations). Préciser les valeurs $\left(f^{-1}\right)'(1)$ et $\left(f^{-1}\right)'(8)$.
5. Représenter dans un même repère orthonormal f et f^{-1}.

Exercice 20 : Étude complète de la fonction th définie par $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

On montrera, notamment, que la fonction th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser et on s'interrogera sur la dérivabilité de sa réciproque.

Bonus : Simplifier les expressions $\mathrm{A} = \dfrac{\operatorname{ch}(\ln(x)) + \operatorname{sh}(\ln(x))}{x}$ et $\mathrm{B} = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right)$.