Chapitre

IV Applications

Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets.

Henri Poincaré

Une civilisation constituée de groupes de personnes n'interagissant pas entre eux serait assez pauvre. Ce sont les relations entre groupes d'individus qui permettent de comparer, d'apprendre, de progresser, de transmettre, que ce soient des relations internes à un groupe donné, ou des relations d'un groupe à un autre. Une civilisation sans relation est vouée à la stérilité et à l'immobilisme, et donc à l'extinction.

Il en est de même pour les ensembles mathématiques. La théorie axiomatique des ensembles est certes très belle en soi, mais si on n'y rajoute pas une couche, elle est d'un intérêt assez limité pour le mathématicien recherchant le débouché concret. Comme dans le cas d'une civilisation, il faut faire interagir les ensembles, il faut créer des relations permettant de comparer les éléments d'un ensemble d'une façon ou d'une autre. Ce n'est qu'ainsi qu'on peut donner vie aux ensembles.

CONTENU

I/ Le contexte

I.1 Relation binaire

Les ensembles ayant été définis au chapitre précédent, intéressons nous brièvement à ces relations entre eux dont parlait Poincaré. [1]

Définition 1 : Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle *relation binaire entre* E *et* F un triplet $\mathscr{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathscr{G})$ où $\mathscr{G}$ est une partie de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, appelée *graphe* de la relation binaire.

$$(x\,;y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F},\ x\mathscr{R}y \iff (x\,;y)\in\mathscr{G}.$$

Dans la pratique, on s'intéressera plutôt aux relations d'un ensemble E dans lui-même.

Exemples 1 :

1. L'égalité sur $\mathrm{E}=\{1,\,2,\,3\}$ est une relation binaire. Son graphe est $\mathscr{G}=\{(1,1),\,(2,2),\,(3,3)\}$.

$=$	1	2	3
1	$(1,1)$		
2		$(2,2)$	
3			$(3,3)$

2. La relation $\leqslant$ sur $\mathrm{E}=\{1,\,2,\,3\}$ est une relation binaire.

$\leqslant$	1	2	3
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
2		$(2,2)$	$(2,3)$
3			$(3,3)$

[1]. Henri Poincaré est un mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences français, né le 29 avril **1854** à Nancy et mort le 17 juillet **1912** à Paris.

Poincaré a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte et de la théorie des systèmes dynamiques.

Il est considéré comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant l'ensemble des branches des mathématiques de son époque et certaines branches de la physique.

3. La relation $<$ sur $E = \{1, 2, 3\}$ est une relation binaire.

$<$	1	2	3
1		$(1,2)$	$(1,3)$
2			$(2,3)$
3			

4. La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff 3$ divise $y-x$ est une relation binaire sur $E = \{0, 1, 2, 3, 5\}$.

$\mathcal{R}$	0	1	2	3	5
0	$(0,0)$			$(0,3)$	
1		$(1,1)$			
2			$(2,2)$		$(2,5)$
3	$(3,0)$			$(3,3)$	
5			$(5,2)$		$(5,5)$

5. La relation $\subset$ est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.
6. Dans le plan, les relations $/\!/$ et $\perp$ sont des relations binaires de l'ensemble des droites, la colinéarité sur l'ensemble des vecteurs,...

Proposition 1 :
Soit $\mathscr{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathscr{R}$ est :

— *Réflexive* lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x.$$

— *Symétrique* lorsque le graphe de $\mathscr{R}$ est symétrique :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x.$$

— *Antisymétrique* [2] lorsque :

$$\forall x, y \in E,\ (x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}x) \implies x = y.$$

— *Transitive* lorsque :

$$\forall x, y, z \in E,\ (x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z.$$

Exemples 2 : Sur les ensembles adéquats :

— L'égalité est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
— La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
— La relation $<$ est seulement transitive.

[2]. On remarquera qu'il ne s'agit pas de la négation de « symétrique ».

— La relation $\mathscr{R}$ définie par $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y-x$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.
— La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
— La relation // est réflexive, symétrique et transitive.
— La relation $\perp$ est symétrique.
— La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.

Les relations d'égalité, de parallélismes, d'équivalence, de colinéarité de vecteurs non nuls sont toutes des relations réflexives, symétriques et transitives dans leur ensemble respectif.

De même, les relations de comparaison large et d'inclusion sont toutes deux réflexives, anti-symétriques et transitives.

Elles définissent des familles bien plus larges dans lesquelles on les regroupent. C'est le thème des deux paragraphes suivants :

I.2 Relation d'équivalence

Définition 2 : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice 1 : On définit sur $\mathbb{C}$ une relation binaire en posant

$$\forall\,(z\,;z')\in\mathbb{C}^2,\quad (z\mathscr{R}z' \iff |z|=|z'|).$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $z\in\mathbb{C}$, déterminer l'ensemble des éléments en relation avec z ce que l'on appelle sa *classe* d'équivalence.

Exemples 3 :

— La relation définie dans $\mathbb{R}$, par $\forall\,x,y\in\mathbb{R},\ x\mathscr{R}y \iff x-y\in 2\pi\mathbb{Z}$, est une relation d'équivalence.

Cette relation est appelée la congruence modulo 2π dans $\mathbb{R}$, et on note

$$\forall\,x,y\in\mathbb{Z},\ x\equiv y\ [2\pi] \iff \exists\,k\in\mathbb{Z}, x=y+2k\pi.$$

Les *représentants* de chaque classe dans l'intervalle $]\pi\,;\pi]$ s'appelle la *mesure principale* de l'angle considéré : $\dfrac{13\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

— Dans $\mathbb{Q}$, la relation $\stackrel{\sim}{=}$ définie par $\forall\left(\dfrac{a}{b}\,;\dfrac{c}{d}\right)\in\mathbb{Q}^2,\ \dfrac{a}{b}\stackrel{\sim}{=}\dfrac{c}{d} \iff ad-bc=0$ est une relation d'équivalence dont les représentants des (nombreuses) classes sont les fractions irréductibles : $3\times 35=7\times 15 \iff \dfrac{3}{7}\stackrel{\sim}{=}\dfrac{15}{35}$.

Remarque : Soit E un ensemble non vide. On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble des éléments en relation avec lui.

— Les classes d'équivalence sont des parties de E non vides et deux à deux disjointes.
— La réunion des classes d'équivalence est égale à E.

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E.

I.3 Relation d'ordre

Définition 3 : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

— On dit alors que $(\mathrm{E}, \mathscr{R})$ est un ensemble *ordonné*.
— Deux éléments x et y de E sont dits *comparables* pour l'ordre $\mathscr{R}$ lorsque l'on a $x\mathscr{R}y$ ou bien $y\mathscr{R}x$.
— Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, on dit que l'ordre $\mathscr{R}$ est *total* et que $(\mathrm{E}, \mathscr{R})$ est un ensemble *totalement ordonné*, partiel dans l'autre cas.

Une relation d'ordre est en général notée $\leqslant$ *i.e.* que $x\mathscr{R}y$ est plutôt noté $x \leqslant y$, de la même manière que l'on choisit, en général des symboles qui ressemblent au signe « $=$ » pour les relations d'équivalence.

Exemples 4 :

— L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.
— Soit E un ensemble, $(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné.
— Soit I un ensemble non vide, on pose $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles et on la relation $\mathscr{R}$:

$$\forall f, g \in \mathrm{E},\ f\mathscr{R}g \iff \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant g(x).$$

$\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel appelée ordre fonctionnel.

ATTENTION

La négation de $x \leqslant y$ est :

x et y ne sont pas comparables OU x et y sont comparables et $x > y$.

Exercice 2 : On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\prec$ définie par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

Démontrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total ?

Correction : La relation $\prec$ est

— réflexive : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x \leqslant x$ et $y \leqslant y$.
— transitive : si $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3)$, alors

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \text{ et } y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3.$$

Donc $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$.

— antisymétrique : si $(x,y) \prec (x',y')$ et $(x',y') \prec (x,y)$, alors on a à la fois $x \leqslant x'$ et $x' \leqslant x$ et donc $x = x'$ et de même $y = y'$.

Elle définit donc bien une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

L'ordre n'est pas total, car on ne peut pas comparer $(0,1)$ et $(1,0)$.

Définition 4 (Parties bornées) : Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

— A est *majorée* dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
— A est *minorée* dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
— A est *bornée* dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

— A admet un *maximum* lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
— A admet un *minimum* lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

ATTENTION

— Une partie d'un ensemble ordonné n'est pas forcément majorée (ou minorée), par exemple $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$.
— Les majorants et minorants ne sont pas uniques.
— Les majorants et minorants n'appartiennent pas forcément à l'ensemble mais quand ils le sont, ce sont des maxima et minima réciproquement.

Proposition 2 (Unicité des extrema) :
Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

— Si A est *majorée* par un majorant β qui est dans A alors celui-ci est unique.

On l'appelle LE maximum de A et on note $\beta = \max(\mathrm{A})$.

— Si A est *minorée* par un minorant α qui est dans A alors celui-ci est unique.

On l'appelle LE minimum de A et on note $\alpha = \min(\mathrm{A})$.

Les maxima et minima n'existent pas forcément même pour une partie bornée mais, s'ils existent, ils sont uniques. C'est ce qui justifie les notation max(A) et min(A).

Exercice 3 : On reprend les notations de exercice (2) . Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ?

Correction : Soit (x,y) un majorant de ce disque noté D. Alors $(1,0) \prec (x,y)$ et donc $x \geqslant 1$.

De même, $(0,1) \prec (x,y)$ et donc $y \geqslant 1$.

Ainsi, on a $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$.

Réciproquement, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$.

Alors (x, y) est clairement un majorant de D, puisque tout élément (x_0, y_0) de D vérifie $x_0^2 + y_0^2 \leqslant 1$, et donc $x_0 \leqslant 1$ et $y_0 \leqslant 1$.

On en déduit que l'ensemble des majorants de D est

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 1\right\}.$$

D n'admet donc pas de plus grand élément, puisque les majorants de D ne sont pas dans D.

Remarque : On verra plus tard qu'en revanche, D admet une borne supérieure, le plus petit des majorants de D, qui est $(1, 1)$.

II/ Applications

La notion d'*application* (ou fonction) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

II.1 Fonctions et Applications

Définition 5 : Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle *application (ou fonction)* de E dans F toute relation $\mathscr{R} = (\mathrm{E} ; \mathrm{F} ; \mathscr{G})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (y ; y') \in \mathrm{F}^2,\ x \mathscr{R} y \text{ et } x \mathscr{R} y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée.
- y est l'image de x par $\mathscr{R}$ que l'on notera plutôt $y = \mathscr{R}(x)$.
- x est un antécédent de y par $\mathscr{R}$.
- $\mathscr{G}$ est le graphe de la relation. C'est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

L'ensemble des fonctions E vers F est noté $\mathscr{F}(\mathrm{E} ; \mathrm{F})$ ou encore F^{E}.

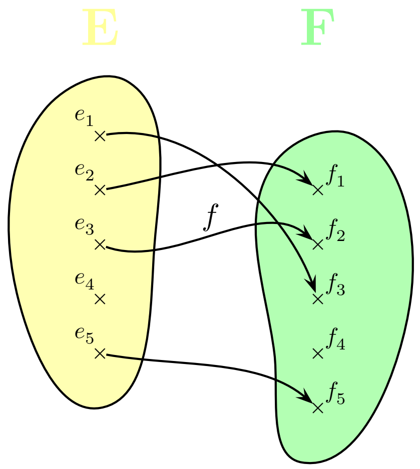
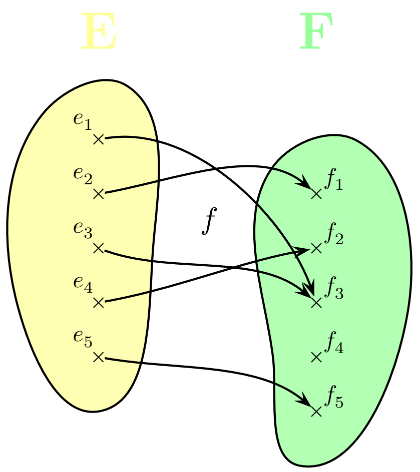


Figure IV.1 – Diagramme sagittal d'une fonction qui n'est pas une application.

Remarque importante : On réserve le nom de « fonction » à une application définie sur une partie non précisée d'un ensemble donné, autrement dit à une application dont l'ensemble de définition n'est pas nécessairement égal à l'ensemble de départ.

Plus généralement une fonction associe à tout antécédent **au plus** une image, tandis qu'une application associe à tout antécédent **exactement** une image.

Dans la suite et comme demandé dans le programme, nous ne ferons plus la différence entre ces deux termes. Celui de « fonction » nous permettant, par exemple, de chercher le domaine de définition de la fonction $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. En d'autres termes, définir l'application $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}$.



$\mathcal{G}_f = \{\, (e_1\,;f_3)\,;\,(e_2\,;f_1)\,;\,(e_3\,;f_3)\,;\,(e_4\,;f_2)\,;\,(e_5\,;f_5)\,\}$

Sur cet exemple, tout élément de l'ensemble de départ a une image unique.

On dit alors que l'application f est « bien définie ».

Figure IV.2 – Diagramme sagittal d'une application.

Définir une application nécessite donc la donnée de E, de F et du graphe $\mathcal{G}$, ce qui revient à définir, d'une façon ou d'une autre, un élément $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Pour désigner une application on utilise en général une lettre minuscule. Si f est une application de E vers F on écrit plus simplement :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

et le graphe de f est l'ensemble $\mathcal{G}_f = \{\,(x\,;f(x))\ /\ x \in \mathrm{E}\}$.

Vocabulaire :

— Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, on parle de fonction de la variable réelle ou, plus simplement, de fonction réelle.
— Si $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on parlera de fonction *à valeurs* réelles ou complexes réciproquement.

Exemples 5 :

— L'exponentielle est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
— Le logarithme est une application de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
— Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application car 0 n'a pas d'image. Son ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

En conséquence, l'application $\left(\dfrac{1}{x}\right)_{|\mathcal{D}_f} : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ est correctement définie.
— Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Le schéma :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}: & \mathrm{E} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathrm{A} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathrm{B} \end{cases} \end{array}$$

n'est celui d'une fonction sur E que si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

Définition 6 (Domaine de définition) : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle *domaine de définition* de f, noté $\mathscr{D}_f$, l'ensemble

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathrm{A}\ /\ f(x) \text{ existe}\}.$$

Si $x \in \mathscr{D}_f$ et si $y = f(x)$, on dit que :
— y est l'image de x par f,
— x est un antécédent de y par f (pas forcément unique).

Toute étude de fonction f devra donc commencer par préciser son domaine de définition.

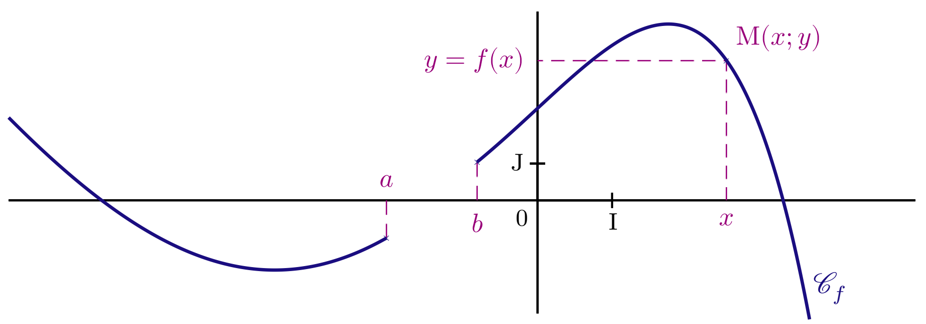


Figure IV.3 – $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;a] \cup [b\,;+\infty[$.

CHAPITRE IV. APPLICATIONS

Méthode 1 :
Quand seul le procédé d'association $x \longmapsto f(x)$ est donné, chercher l'ensemble de définition de f c'est déterminer le plus grand ensemble (au sens de l'inclusion) des éléments x pour lesquels $f(x)$ est bien défini.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto \sqrt{x^2-4x+3}$ $\qquad$ $f_3 : x \longmapsto \ln|\ln x|$

Méthode 2 (Trouver un ensemble de définition) :
À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

1. Les expressions de la forme $\dfrac{\dots}{\boxed{}}$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \neq 0$. Une équation à résoudre ...
2. Les expressions de la forme $\sqrt{\boxed{}}$ ou $\ln\left(\boxed{}\right)$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \geqslant 0$ ou $\boxed{} > 0$. Une étude de signes à faire ...

II.2 Zoologie

Définition 7 (Identité d'un ensemble) : Soit E un ensemble.

L'*identité* de E est l'application de E dans E qui à chaque élément de E associe lui-même. On la note :

$$id_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & id_{\mathrm{E}}(x) = x \end{array}.$$

Exemples 6 (Important) :

— La fonction nulle sur un ensemble E est définie par $0_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$.

— Soit $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. L'injection canonique $i : \mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{F}$ définie par $\forall\, x \in \mathrm{E},\ i(x) = x \in \mathrm{F}$.

— La projection canonique $p_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ définie par $p_{\mathrm{E}}\big((x\,;y)\big) = x$.

ATTENTION

Égalité de fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si, et seulement si elles ont :

— le même ensemble de départ E,
— le même ensemble d'arrivée F,
— le même graphe *i.e.* $\forall x \in \mathrm{E},\ f(x) = g(x)$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et la fonction $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2$ ne sont pas égales !

Définition 8 (Coïncidence) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}'$ deux applications.

On dit que f et g *coïncident* sur une partie A de $\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ si $\forall x \in \mathrm{A},\ f(x) = g(x)$.

Exemple 7 : $f : x \longmapsto \ln(x^2)$ et $f : x \longmapsto 2\ln(x)$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ sans être égales.

Définition 9 (Restriction) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle *restriction* de f à A, notée $f_{|\mathrm{A}}$, l'application définie par :

$$f_{|\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Une fonction f et sa restriction $f_{|\mathrm{A}}$ à une partie A coïncident donc sur A.

Exemple 8 : La valeur absolue $|\,| : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est la restriction à $\mathbb{R}$ du module $|\,| : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R}_+$.

Définition 10 (Prolongement) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$, on appelle *prolongement* de f à E', notée en général $\tilde{f}$, l'application $\tilde{f} : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}$ qui coïncide avec f sur E.

La fonction f est alors une restriction de $\tilde{f}$ sur E.

Exemples 9 :

— $x \longmapsto \ln|x|$ est un prolongement de ln à $\mathbb{R}^*$.
— Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on peut prolonger $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ à $\mathbb{R}$ en posant :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Remarques :

— Restreindre (resp. prolonger) une application c'est diminuer (resp. augmenter) son ensemble de définition.
— Il existe une seule façon de restreindre une fonction, mais plusieurs de la prolonger.

Définition 11 (Corestriction) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F. Si B est une partie de F telle que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$, on appelle *corestriction* de f à B, notée $f^{|\mathrm{B}}$, l'application définies par :

$$f^{|\mathrm{B}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Pour des raisons pratiques, il nous arrivera fréquemment de corestreindre une application $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ à son image $f(\mathrm{I})$ et de considérer $\tilde{f} : \mathrm{I} \longmapsto f(\mathrm{I})$.

Remarque : Si la restriction d'une application est toujours possible, ce n'est pas le cas de la corestriction à une partie B de F qui nécessite que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$. C'est d'ailleurs pour cela que cette notion est en marge du programme de PTSI. Elle n'est citée ici que pour compléter les notions précédentes.

Exemple 10 : Soit $\chi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, on peut définir $\chi^{|[-2,+\infty[}$ et $\chi^{|[0,+\infty[}$, mais pas $\chi^{|[1,2]}$.

Définition 12 (Fonction indicatrice) : Soit A une partie d'un ensemble E.

On appelle fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_\mathrm{A}$, l'application de E dans $\{0\,;1\}$ définie par :

$$\mathbb{1}_\mathrm{A} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ x & \longmapsto & \mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathrm{A}, \\ 0 \text{ si } x \notin \mathrm{A}. \end{cases} \end{array}$$

II.3 Opérations algébriques

Définition 13 (Somme, produit et quotient de fonctions) : Soient E et F deux ensembles, f et g deux fonctions définies sur E à valeurs dans F.

— On appelle fonction *somme* de f et g, notée $f+g$, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
— On appelle fonction *produit* de f et g, notée $f \times g$ ou fg, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$
— Si g ne s'annule pas sur E, on appelle fonction *quotient* de f et g, notée $\dfrac{f}{g}$, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction λf par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble des fonctions de E dans F récupère alors, par l'intermédiaire des ces définitions, les propriétés de l'ensemble d'arrivée F.

Par exemple, si F est une partie de $\mathbb{R}$, la somme et le produit de deux fonctions sont associatifs, commutatifs et le produit est distributif sur l'addition.

II.4 Composition

Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une application coïncide avec l'ensemble de départ d'une autre application [3], alors il est possible « d'enchaîner » les deux, c'est la composition :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E} & \longmapsto & \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{G} \\ x & & f(x) & & g(f(x)) \end{array}$$

Définition 14 (Composée de fonctions) : Soient E, F, E′ et G′ des ensembles et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, $g : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}'$ deux applications telles que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}'$.

La *composée* de f par g, notée $g \circ f$, est l'application de E sur F′ définie par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

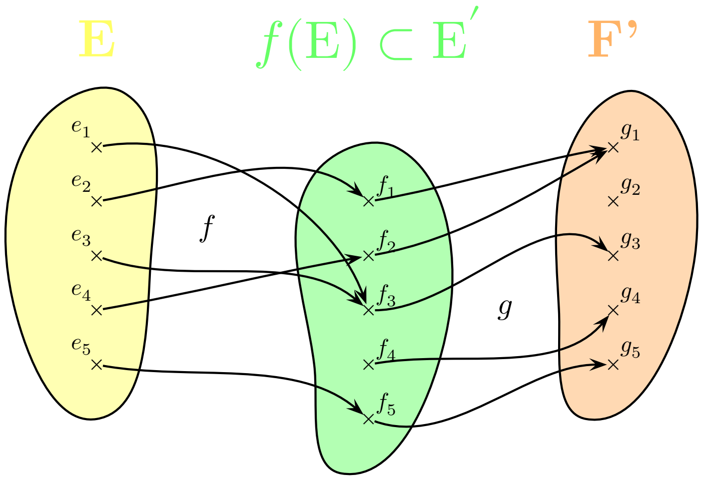
$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F}' \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

ATTENTION

La condition $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}'$ ou encore « f est à valeurs dans E′ » est particulièrement importante.

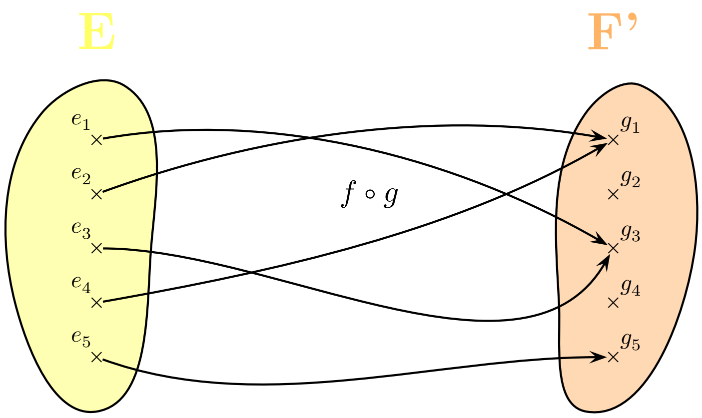
On doit garantir que $f(x)$ appartienne au domaine de définition de g pour tout x de E.

[3]. ou, du moins, l'image de l'une est incluse dans l'ensemble de départ de l'autre



$$f(\mathrm{E}) = \{f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_5\} \subset \mathrm{E}' \text{ et } g(\mathrm{E}') = \{g_1,\, g_3,\, g_4,\, g_5\} \subset \mathrm{F}'$$

Figure IV.4 – Diagramme sagittal d'une composée



$$(g \circ f)(\mathrm{E}) = \{g_1,\, g_3,\, g_5\} \subset g(\mathrm{E}') \subset \mathrm{F}'.$$

Figure IV.5 – Diagramme sagittal d'une composée

Remarque : Lorsque l'on a deux applications $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{H} \longmapsto \mathrm{G}$ avec seulement $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ (au lieu de $\mathrm{F} = \mathrm{H}$) la définition n'autorise théoriquement pas la construction de $g \circ f$.

Néanmoins si $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{H}$, on peut considérer la composée $g_{|f(\mathrm{E})} \circ f^{|f(\mathrm{E})}$ que l'on écrira encore, par abus de langage et soucis de simplicité, $g \circ f$.

Exemple 11 : L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est $]0\,;2[$.

Lorsque f est une application d'un ensemble E vers lui-même, alors on peut composer f avec elle-même, et autant de fois que l'on veut et on notera

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{\text{n fois}}.$$

Par convention, on pose $f^0 = id_{\mathrm{E}}$.

Exemple 12 : Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \text{ stable par } f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

En particulier, $u_{n+1} = f^{n+1}(u_0)$.

ATTENTION

Sauf cas particulier, $f\circ g \neq g\circ f$. La composition n'est pas une opération commutative.

L'existence de $g\circ f$ ne garantie pas celle de $f\circ g$.

Comparez, par exemple, les domaines de définitions de $x \longmapsto \ln|x|$ et $x \longmapsto |\ln(x)|$.

Théorème 3 :
Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ et $h : \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{H}$ trois applications.

- $id_{\mathrm{F}} \circ f = f$ et $f \circ id_{\mathrm{E}} = f$. On dit que l'identité est élément *neutre* pour la composition.
- $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$. La composition est associative.

Exercice 5 : Déterminer, si possible, les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ et préciser leur domaine de définition.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$
3. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$

III/ Aspects qualitatifs

III.1 Graphe d'une fonction

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe correspond au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des éléments $(x\,;f(x))$, pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Le graphe permet d'avoir une idée générale de la fonction étudiée. Un graphe précis (par approximations et interpolation à partir d'un grand nombre de points, obtenus par exemple par des expériences) permet d'obtenir facilement une première approximation de solutions de certaines équations ou inéquations en physique, par exemple.

Certaines opérations simples sur les fonctions se traduisent facilement sur le graphe, comme la composition à la source ou à l'arrivée par $x \longmapsto ax$ ou $x \longmapsto x-a$.

On se place dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ orthonormé direct.

Définition 15 (Graphe d'une fonction) : Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et à valeurs réelles.

On appelle *courbe représentative* de f ou *graphe* de f, et on note $\mathscr{C}_f$ ou $\mathcal{G}$, l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ définit par :

$$\mathscr{C}_f = \Big\{ (x\,;y) \;/\; (x \in \mathscr{D}_f) \wedge \Big(y = f(x)\Big) \Big\}.$$

Remarque : On ne peut pas toujours tracer la représentation d'une fonction. Par exemple, la courbe de $f : x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ produit des oscillations non représentables au voisinage de 0.

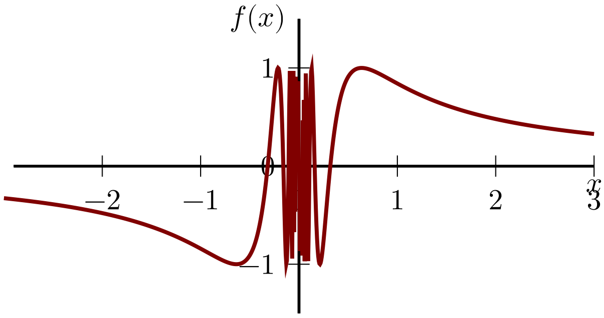


Figure IV.6 – La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas représentable au voisinage de 0.

III.2 De l'intérêt des fonctions de référence

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathscr{C}_f$) :
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

— $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
— $x \longmapsto f(x - a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\imath}$.
— $x \longmapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par une symétrie d'axe $x = \dfrac{a}{2}$.
— $x \longmapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\dfrac{1}{a}$. [4]
— $x \longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a.

Cette proposition donne tout son intérêt aux fonctions, dites de référence :

- $x \longmapsto x$
- $x \longmapsto x^2$
- $x \longmapsto x^3$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
- $x \longmapsto \ln x$
- $x \longmapsto \sin x$
- $x \longmapsto \cos x$
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x$

[4]. $a \neq 0$ bien sûr !

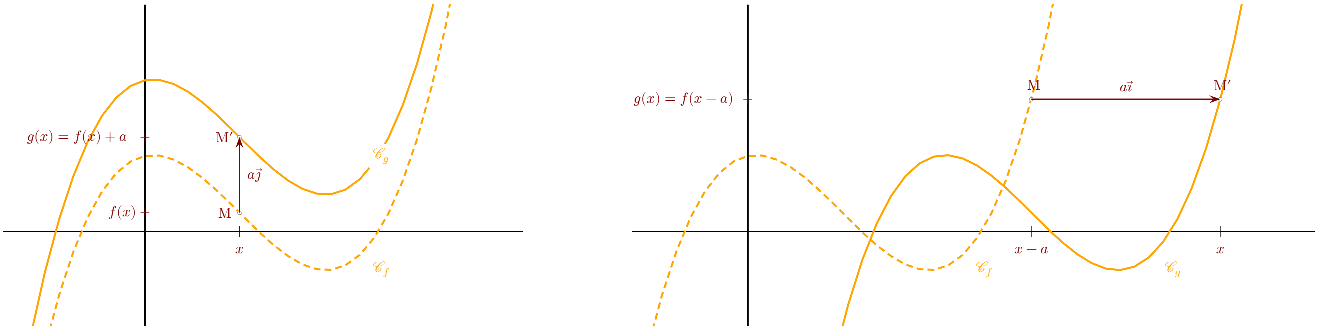


Figure IV.7 – $x \longmapsto g(x) = f(x) + a$ et $x \longmapsto g(x) = f(x-a)$.

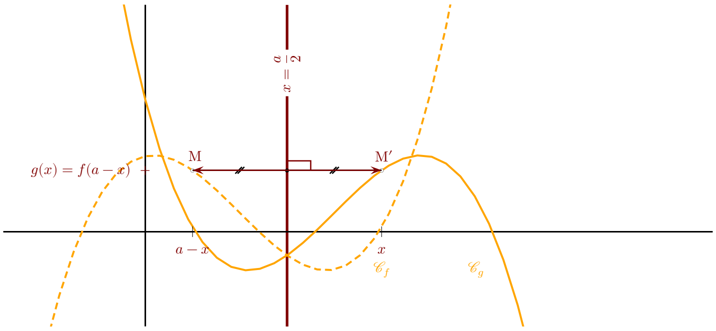


Figure IV.8 – $x \longmapsto g(x) = f(a-x)$.

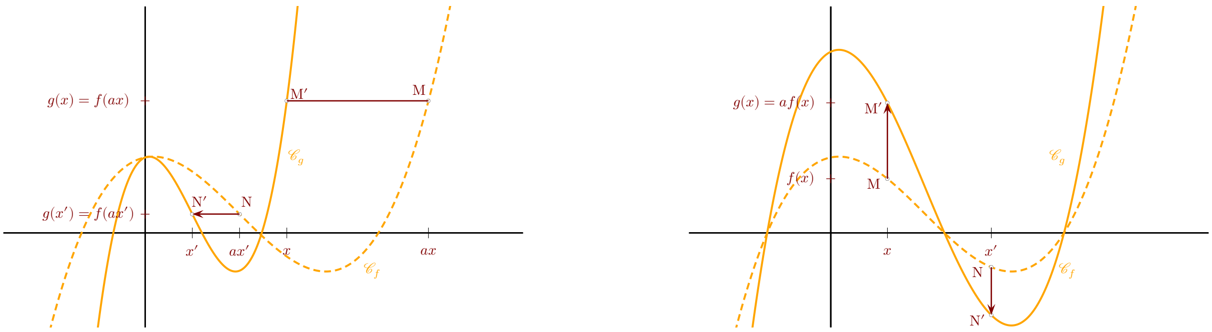


Figure IV.9 – $x \longmapsto g(x) = f(ax)$ et $x \longmapsto g(x) = af(x)$.

III.3 Parité, imparité et symétrie

Définition 16 :

— Une fonction f est *paire* lorsque son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = f(x).$$

— Une fonction f est *impaire* lorsque son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = -f(x).$$

Le graphe d'une fonction continue et impaire passe toujours par l'origine.

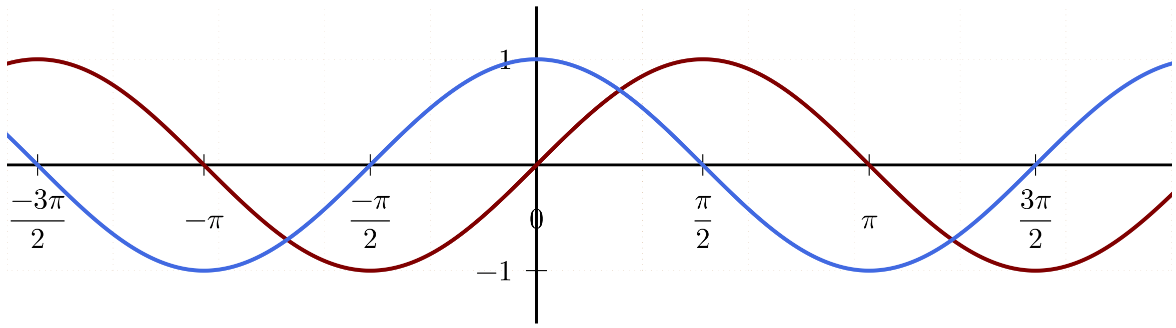


Figure IV.10 – $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont respectivement paires et impaires.

Exemples 13 :

- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\,|$, cos, ch sont paires.
- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, sin, sh et tan sont impaires.
- Il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires : $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.
- Seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Pour mémoire :

Rappel 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Il existe une unique fonction f_p paire et une unique fonction f_i impaire telles que :

$$f = f_p + f_i.$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

f_p et f_i s'appellent respectivement les *partie paire* et *partie impaire* de f.

Proposition 5 (Interprétation graphique) :

- Une fonction f est paire si, et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction f est impaire si, et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

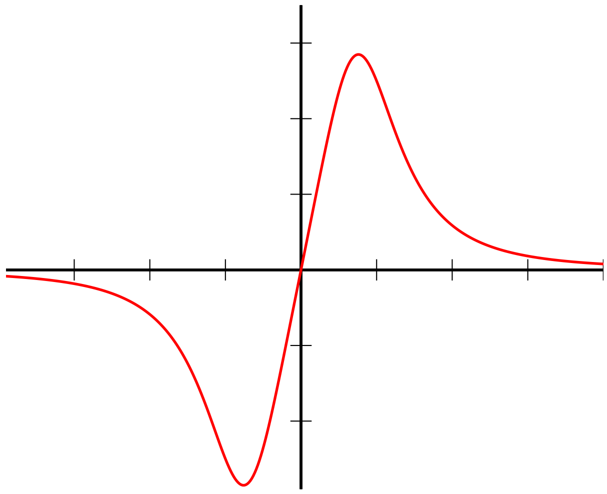


Figure IV.11 – $x \longmapsto \dfrac{5x}{x^4+1}$ est impaire.

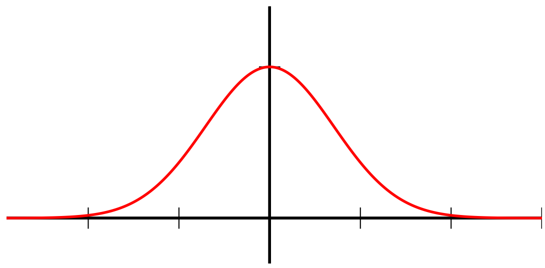


Figure IV.12 – $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est paire.

Preuve : Montrons, par exemple, le premier point. Le second se démontre de manière analogue.

Supposons f paire et notons $\mathscr{G}$ son graphe.

Si $\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathscr{G}$ alors $y = f(x)$. Le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est $(-x\,;y) = (-x\,;f(x)) = (-x\,;f(-x)) \in \mathscr{G}$.

Donc $\mathscr{G}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{G}$ soit symétrique par rapport à$(\mathrm{O}y)$.

D'une part $\mathscr{D}_f$ est alors nécessairement symétrique par rapport à 0.

De plus si $(x\,;y) \in \mathscr{G}$ alors $(-x\,;y) \in \mathscr{G}$ *i.e.* $y = f(-x) = f(x)$ et f est paire.

Méthode 3 (Restriction du domaine d'étude) :
Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on restreint son étude au domaine $\mathscr{D}_f \cap [0\,;+\infty[$ et on complète la courbe par symétrie.

IV/ Fonctions et relation d'ordre

IV.1 Fonctions monotones

Définition 17 (Fonctions monotones) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

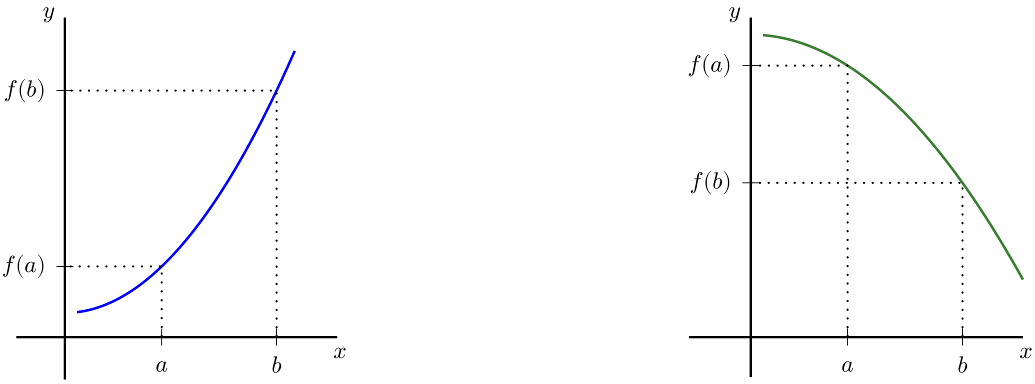
— La fonction f est *croissante* (*resp.* strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \leqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) < f(y)).$$

— La fonction f est *décroissante* (*resp.* strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \geqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) > f(y)).$$

— La fonction f est *monotone* sur I (*resp.* strictement monotone) sur I si f est soit croissante (*resp.* strictement croissante), soit décroissante (*resp.* strictement décroissante) sur I.



Fonction croissante sur I

Fonction décroissante sur I

$a < b \implies f(a) \leqslant f(b)$

$a < b \implies f(a) \geqslant f(b)$

Figure IV.13 – Une fonction croissante conserve les inégalités, une décroissante les renverse.

Remarque : Les fonctions croissantes sont donc les fonctions compatibles avec la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

La définition (17) est générale et ne requiert pas la dérivabilité.

Exemples 14 :

1. La fonction cos est :
   - décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - croissante sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 : Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.
2. f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6 (Composée de fonctions monotones) :
La composée de fonctions monotones est monotone et la règle des signes donne le sens de la monotonie.

Remarque : On ne peut en revanche rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones en général !

Par exemple $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ mais pas $x \longmapsto x^2 - x$ [5].

[5]. Pas plus que $x \longmapsto x^2 - x$ est décroissante !

Exemple 15 : Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction $x \longmapsto x + \ln x$, somme de fonctions strictement croissantes, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pas plus que pour la fonction $x \longmapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$, composée de fonctions croissantes ou encore $x \longmapsto \sqrt{x}\,e^x$, produit de fonctions **positives** croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 : Sans calcul de dérivée, étudier le sens de variation de :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \longmapsto \exp(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)-1}$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

IV.2 Fonctions majorées, minorées, bornées, ...

Définition 18 (Fonction bornées) : Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

— Une fonction f est dite *majorée* sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

Le réel M est alors appelé un *majorant* de f (sur I).

— Une fonction f est dite *minorée* sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant m.$$

Le réel m est alors appelé un *minorant* de f (sur I).

— Une fonction f est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

ATTENTION Les minorants et majorants ne sont pas forcément atteints même lorsqu'ils existent (*confer* l' exemple (16)).

Exercice 8 : Soit $f : x \longmapsto -2x^2 + 3x - 1$. Montrer que f est majorée.

Proposition 7 :
Une fonction f est bornée si, et seulement si $|f| : x \longmapsto |f(x)|$ est majorée.

Preuve : Supposons f bornée. Alors $|f|$ est majorée par $\max\left(\left|\min\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)\right|;\left|\max\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)\right|\right)$

Réciproquement si $|f|$ est majorée par $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ alors $\forall\, x \in \mathrm{I},\ -\mathrm{M} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$ et f est bornée.

Exemple 16 : La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, y est bornée. Majorée par 1 (atteint) et minorée par 0 (non atteint).

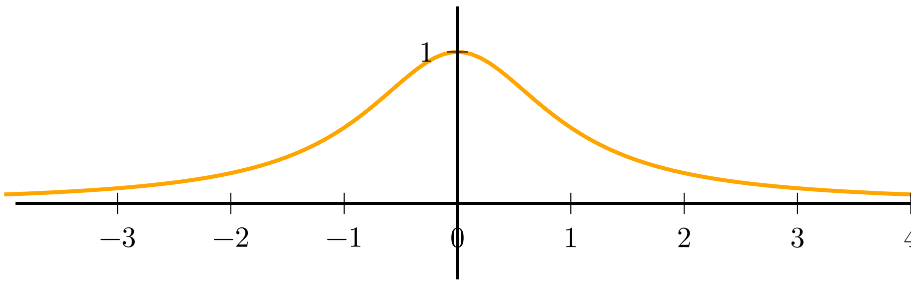


Figure IV.14 – Courbe représentative d'une fonction bornée.

IV.3 Extrema

Définition 19 (Extrema globaux et locaux) : Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

— La fonction f admet un *maximum global* (*resp. minimum global*) en x_0 si :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x)$ (*resp.* $f(x_0) = \min\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x)$).

— La fonction f admet un *maximum local* (*resp. minimum local*) en x_0 s'il existe un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ contenant x_0 tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{J},\ f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x\in \mathrm{J}} f(x)$ (*resp.* $f(x_0) = \min\limits_{x\in \mathrm{J}} f(x)$).

Il est clair que, dans le cadre de la définition,

$$\max_{x\in \mathrm{J}} f(x) \leqslant \max_{x\in \mathrm{I}} f(x) \quad \text{et} \quad \min_{x\in \mathrm{J}} f(x) \geqslant \min_{x\in \mathrm{I}} f(x).$$

Remarque : Une fonction non bornée ne peut clairement pas avoir d'extrema globaux mais seulement des extrema locaux.

Exemple 17 : Reprenons la fonction de exemple (16) définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

— f admet un maximum global en $x_0 = 0$ qui est 1.
— f est minorée par 0 sans avoir de minimum global.

Preuve : Montrons le par l'absurde en supposant qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Par symétrie, on peut supposer $x_0 \in \mathbb{R}_+$ où f y est strictement décroissante.

La stricte décroissance de f entraîne alors que tout x réel tel que $x_0 < x$ vérifie $f(x) < f(x_0)$, ce qui contredit la définition de x_0.

La fonction f ne peut donc admettre de minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1.

Correction : On a $g(-1) = 2$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} g(x) - g(-1) &= x^3 - 3x - 2 \\ &= (x+1)^2(x-2). \end{aligned}$$

Donc, $\forall\, x \in \mathrm{J} =]-\infty\,;2]$, $g(x) \geqslant g(-1)$.

V/ Dérivation

V.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

— On dit que f est *dérivable en a* si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \to a$, $x \neq a$.

Dans ce cas, on appelle cette limite *nombre dérivé* de f en a, noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

— On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout $a \in \mathrm{A}$ au sens précédent.

On appelle alors *fonction dérivée* de f sur A, que l'on note f' $\left(\text{ou } \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$, la fonction qui à tout x de A associe le nombre dérivé de f en x :
$$\begin{array}{rccl} f' : & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

— On note $\mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par définition du nombre dérivé, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est définie comme la droite d'équation
$$(\mathrm{T}_a) : \; y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

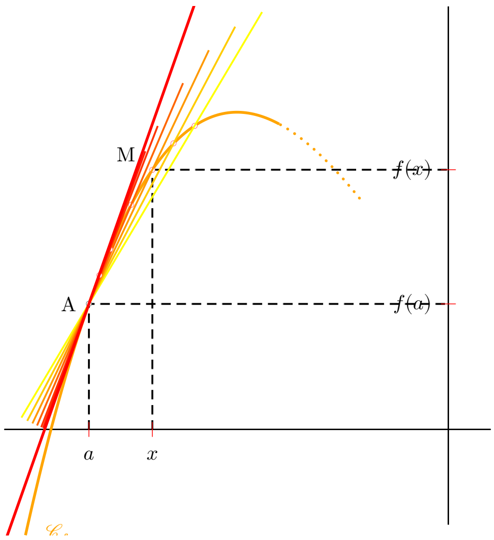


Figure IV.15 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

Remarques : La dérivation est une notion :

— locale et non ponctuelle : la fonction f doit être définie dans un voisinage de a et pas seulement en a.

— locale et non globale : elle ne dépend que de la restriction de f à un voisinage de a quel qu'il soit et non de sa description globale.

V.2 Opérations algébriques et dérivation

Proposition 8 :
Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

(i) Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

(ii) Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) L'inverse d'une fonction dérivable en a et *ne s'annulant pas en* a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

(iv) Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont *le dénominateur ne s'annule pas en* a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

V.3 Composition et dérivation

Théorème 9 (Dérivée d'une composée) :
Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Preuve : Admise pour l'instant.

Rappel 2 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions du tableau.

Fonction f	Dérivée f'	Conditions sur u
$x \longmapsto u(ax+b)$	$au'(ax+b)$	$ax+b \in \mathrm{I}$.
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$.
$u^n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$nu' \times u^{n-1}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$ si $n < 0$.
e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$	
$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$.
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\tan(u)$	$\dfrac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1+\tan^2(u))$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
$f(u)$	$u' \times f'(u)$	$u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

Exercice 10 : Étudier la dérivabilité et donné sa dérivée le cas échéant de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right).$$

V.4 Monotonie et dérivation

Théorème 10 :
Soient I un **(seul)** intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

— f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
— f est décroissante sur I si, et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
— f est constante sur I si, et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Pour la stricte monotonie :

— f est strictement croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathrm{I}$ avec $a < b$.
— f est strictement décroissante sur I si, et seulement si f' est négative sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathrm{I}$ avec $a < b$.

Méthode 4 :
Les cas d'utilisation les plus courants sont :

— Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante sur I.
— Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement décroissante sur I.

ATTENTION Il est fondamental de raisonner sur un intervalle donné !

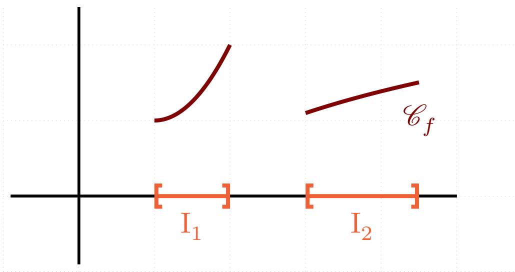


Figure IV.16 – f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geqslant 0$ mais n'est pas croissante sur $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$.

ATTENTION f strictement croissante sur I n'implique pas que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Contre-exemple : la fonction cube $f : x \longmapsto x^3$.

VI/ Continuité

VI.1 Fonction continue

Définition 21 : Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

— On dit que f est *continue en* a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

— On dit que f est *continue sur* I si elle est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.

Graphiquement, la courbe d'une fonction continue peut se tracer sans lever le crayon.

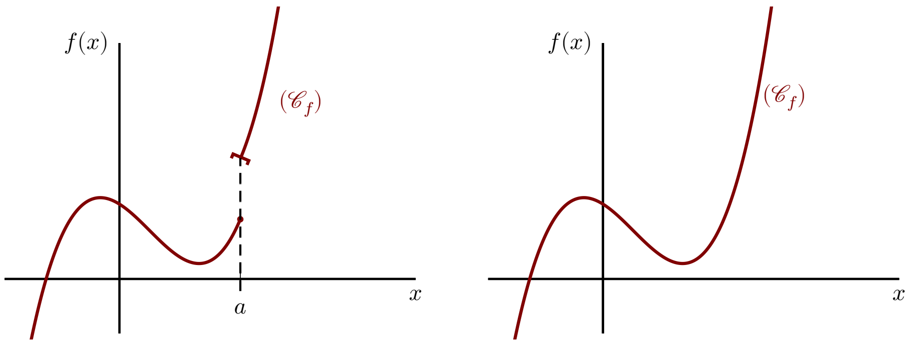


Figure IV.17 – Exemples de fonctions définies continues et discontinues en un point a.

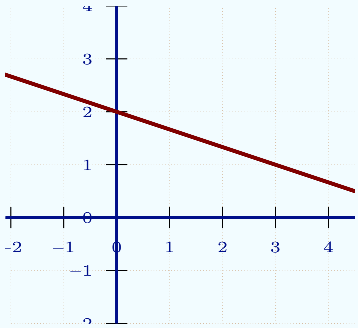
VI.2 Opérations algébriques et continuité

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

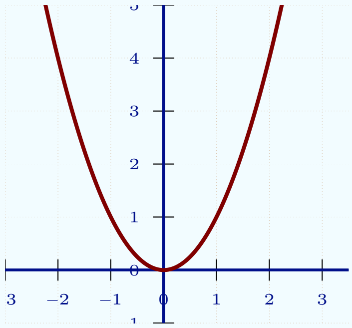
(i) $|f|$ est continue sur I.
(ii) Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur I est continue sur I.
(iii) Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur I est continue sur I.
(iv) Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
(v) Si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemples 18 :

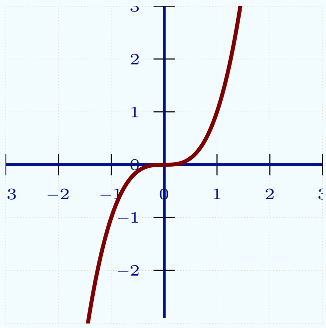
— les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme) sont continues sur leur ensemble de définition ;



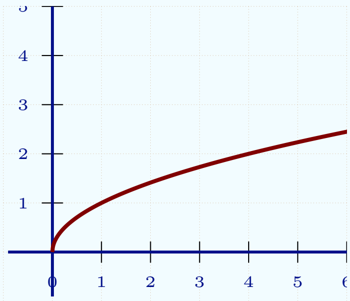
$x \longmapsto -\dfrac{1}{3}x + 2.$



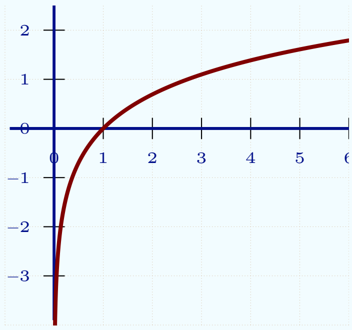
$x \longmapsto x^2.$



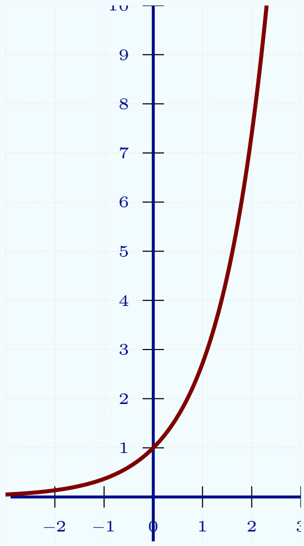
$x \longmapsto x^3.$



$x \longmapsto \sqrt{x}$.

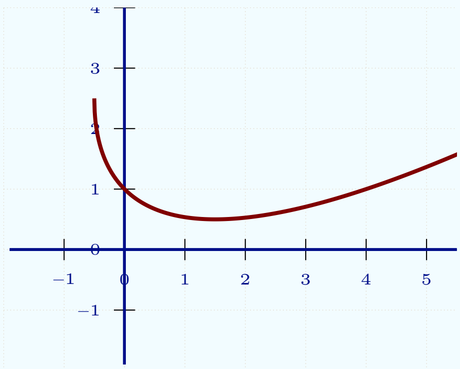


$x \longmapsto \ln x$

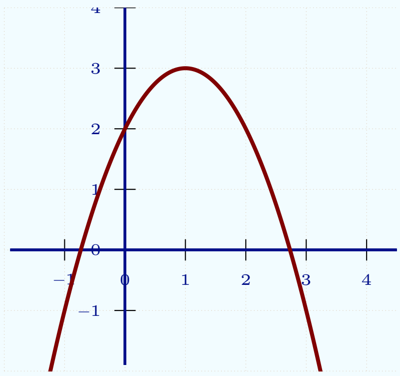


$x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$.

— les fonctions construites à partir des fonctions de référence par combinaisons linéaires, produits ou composition sont continues sur leurs ensembles de définition ;

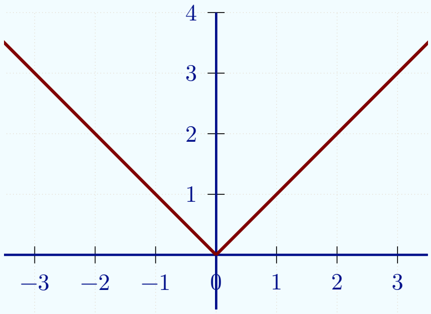


$x \longmapsto x - \sqrt{2x+1} + 3$ sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.



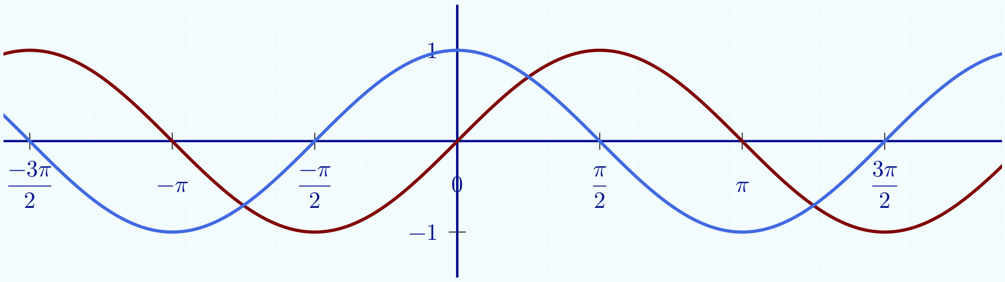
$x \longmapsto -(x+1)(x-3) - 1$.

— la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.



$x \longmapsto |x|$.

— Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.



$x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$.

Théorème 12 (Dérivabilité $\implies$ continuité) :
— Toute fonction dérivable en un point a et continue en ce point.
— Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

ATTENTION Les réciproques sont fausses !

Contre-exemples : valeur absolue, racine carrée en 0.

VI.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 13 (TVI) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Si f change de signe sur I alors elle s'y annule :

$$\text{Pour tous réels } a < b \text{ de I}, \quad f(a)f(b) \leqslant 0 \implies \exists c \in [a\,;b] \;/\; f(c) = 0.$$

ou

2. $f(\mathrm{I})$ est un intervalle : tout réel entre deux valeurs de f admet au moins un antécédent par f.

$$\forall\, f(a), f(b) \in f(\mathrm{I}),\; f(a) < k < f(b) \implies \exists c \in [a\,;b] \;/\; f(c) = k.$$

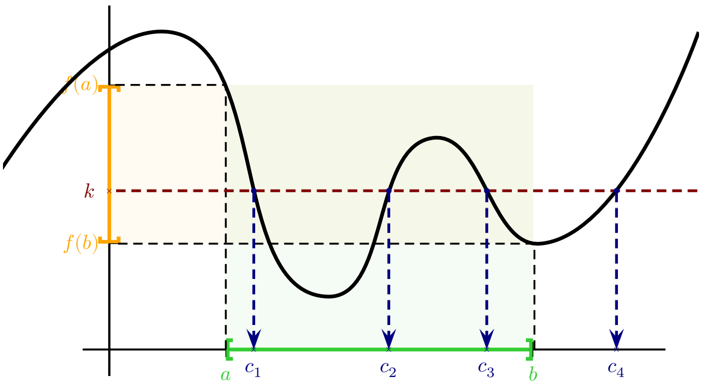


Figure IV.18 – Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.

Remarques :

- Ce théorème assure l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sans en donner la valeur.
- Ce théorème ne dit rien sur l'unicité d'une solution.

ATTENTION

Le théorème n'affirme pas que l'image de l'intervalle $[a\,;b]$ par f est l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$.

Contre-Exemple 19 : Soit $f : x \longmapsto \sin(x)$.

Alors, $f([0\,;\pi]) = [0\,;1] \neq [f(0)\,;f(\pi)] = \{0\}$.

Théorème 14 (TVI strictement monotone) :
Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels de I.

Si f continue et strictement monotone, alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f qui est dans $[a\,;b]$:

$$\exists\,!\, x \in [a\,;b] \;/\; y = f(x).$$

Exercice 11 : Montrer que $0,8$ admet un unique antécédent par la fonction cos dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.

VII/ Injection, Surjection et Bijection

Dans cette partie nous allons revenir sur des notions définies au chapitre précédent et mettre en lumière les propriétés de telles applications. Ces notions joueront un rôle (très) important par la suite.

VII.1 Injection

Théorème 15 :
Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux injections est une injection.

ATTENTION

Dans la deuxième assertion du théorème (15), la fonction g n'est en rien obligée d'être injective !

Preuve :

1. Soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.

   Par définition de la composée, on a alors $g(f(x)) = g(f(y))$ qui entraîne $f(x) = f(y)$ par injectivité de g puis $x = y$ par celle de f.

Donc $x = y$ et $(g \circ f)$ est injective.

2. Réciproquement, soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = f(y)$.

   Alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ en composant (à gauche) par g puis $x = y$ par injectivité de $(g \circ f)$ d'où l'injectivité de f.

Exercice 12 : Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et g n'est pas injective.

Correction : Considérer $x \longmapsto (\,\mathrm{e}^x)^2$.

Exercice 13 (Important) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

Montrer que f est injective si, et seulement si il existe $h : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ telle que $h \circ f = id_{\mathrm{E}}$.

Correction : Si h existe alors, on sait que f est injective.

Réciproquement, supposons f est injective. Il nous faut construire la fonction h :

Soit $y \in \mathrm{F}$, on pose $h(y) = x$ avec x antécédent de y par f dans E si y a un antécédent (on sait alors qu'il est unique par injectivité de f) et si y n'a pas d'antécédent par f on choisit ce qu'on veut pour $h(y)$ dans E.

Chaque élément de F ayant une image unique, la fonction h est donc bien définie.

On vérifie alors que pour tout $x \in \mathrm{F}$, $h(f(x)) = x$ car x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f.

VII.2 Surjection

Théorème 16 :
Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

1. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux surjections est une surjection.

On fera la même remarque sur la surjectivité de f dans la seconde assertion du théorème (16) que dans celle du théorème (15).

Preuve :

1. Soit $z \in \mathrm{G}$. Par surjectivité de g sur G, il existe $y_z \in \mathrm{F}$ tel que $z = g(y)$.

   Par surjectivité de f sur F, il existe aussi $x_y \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.

Par définition de $(g \circ f)$, on a donc trouvé $x \in \mathrm{E}$ tel que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ *i.e.* $(g \circ f)$ est surjective sur G.

2. Réciproquement soit $z \in \mathrm{G}$.

   Par surjectivité de $(g \circ f)$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(g \circ f)(x) = z$ *i.e.* $f(x) \in \mathrm{F}$ tel que $g(f(x)) = z$ donc g est surjective sur G.

Exercice 14 : Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et f n'est pas surjective.

Correction : Considérer $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (Important) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

Montrer que f est surjective si, et seulement si il existe $h : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ telle que $f \circ h = id_{\mathrm{F}}$.

Correction : Si h existe alors on sait que f est surjective.

Réciproquement, si f est surjective, on construit h de même qu'à l' exercice (13) : soit $y \in \mathrm{F}$, on pose $h(y) = x$ avec x antécédent de y par f que l'on peut choisir car il en existe par la surjectivité de f.

On vérifie alors que pour tout $y \in \mathrm{F}$, $(f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = y$ car $h(y)$ est un antécédent de x par f.

VII.3 Bijection

Définition 22 : Soient E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

On dit que f est une *bijection* (ou application bijective) lorsque tout élément de F a un unique antécédent par f :

$$\forall\, y \in \mathrm{F},\ \exists!x \in \mathrm{E} \,/\, y = f(x).$$

Dire que tout élément de F a un unique antécédent revient à dire que tout élément de F a au moins un antécédent et au plus un antécédent.

Par conséquent dire que f est bijective revient à dire que f est surjective et injective.

$$\boxed{f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective et surjective.}}$$

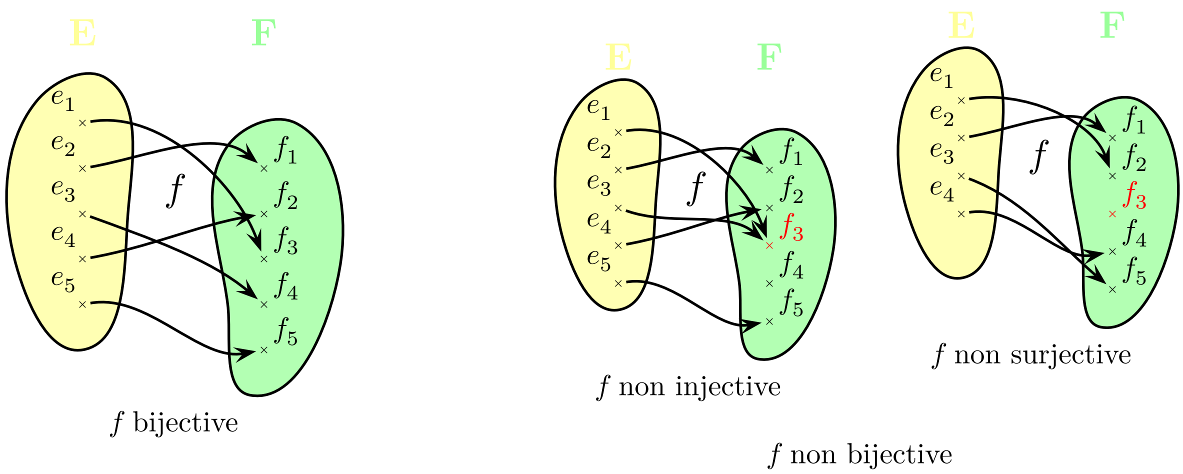


Figure IV.19 – Diagramme sagittal d'une fonction bijective.

Vocabulaire : Deux ensembles reliés par une bijection sont dit *équipotents*.

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.
- $f : [0\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \longmapsto]0\,;+\infty[$ et $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ sont des bijections.
- $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas une bijection.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective, alors f induit une bijection de E vers imf qui est $\tilde{f} : \mathrm{E} \longmapsto imf$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$.

  Cela s'applique en particulier aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle I.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones affirme que toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur son image $f(\mathrm{I})$:

$$\forall\, y \in f(\mathrm{I}),\ \exists\,!x \in \mathrm{I} \,/\, y = f(x).$$

Théorème 17 (Théorème de la bijection) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f est continue [6] et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : & \mathrm{I} & \longrightarrow & f(\mathrm{I}) \quad \text{est bijective.} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle d'un des types suivants :

	I	$[a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b]$	$]a\,;b[$
$f(\mathrm{I})$	f croissante	$[f(a)\,;f(b)]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$
	f décroissante	$[f(b)\,;f(a)]$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;f(a)\right]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$

ATTENTION Il existe des bijections non continues.

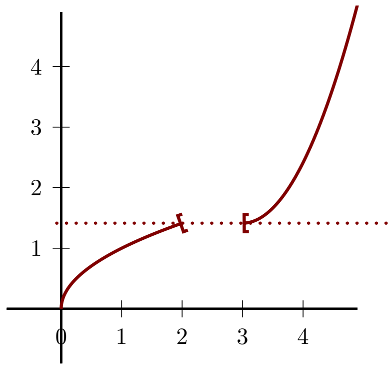


Figure IV.20 – Fonction bijective sur son ensemble de définition, non continue.

Remarques :

— Ne pas confondre f et $\tilde{f}$ ($\tilde{f}$ étant appelé corestriction de f à son ensemble image).

Ces deux fonctions sont définies sur I mais ne possèdent pas nécessairement le même ensemble d'arrivée. $\tilde{f}$ est bijective alors que f ne l'est pas forcément (sauf si $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$).

— Bien comprendre la nuance : dire que la fonction f établit une bijection de I sur son ensemble image $f(\mathrm{I})$ ne signifie pas que f est bijective mais que $\tilde{f}$, la corestriction de f à son ensemble image, l'est.

Exemples 21 :

— exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

— sin induit une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$.

VIII/ Réciproque

VIII.1 Bijection réciproque

Définition 23 : Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est une bijection, alors on peut considérer l'application qui va de F vers E et qui à tout élément x de F associe son unique antécédent par f, cette application est appelée *bijection réciproque* de f, on la note f^{-1} :

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & y \text{ défini par } f(y) = x. \end{array}$$

ATTENTION La notation f^{-1} n'a de sens que lorsque f est bijective.

[6]. et donc définie sur I.

Exemples 22 :

— Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection et la bijection réciproque est $id_{\mathrm{E}}^{-1} = id_{\mathrm{E}}$.
— exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$ dont la bijection réciproque est la fonction logarithme népérien.

Exemple 23 (Fondamental) : La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ car, par exemple, $1^2 = (-1)^2 = 1$.

Cependant, considérons sa restriction f sur $\mathbb{R}_+$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de la bijection affirme alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Elle admet donc une bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ qui est la fonction racine carrée :

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{y} \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{array}\right.$$

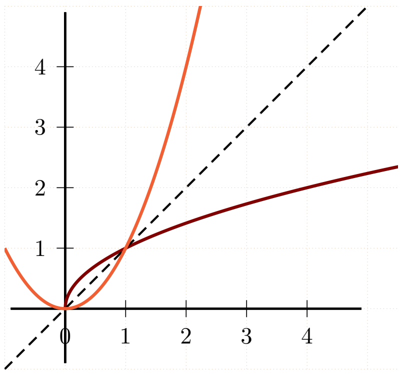


Figure IV.21 – $x \longmapsto x^2$ et sa réciproque $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 18 :
Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une bijection.

— On a $f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{E}}$ et $f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{F}}$.

De plus f^{-1} est une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$.

— Si $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ est une autre bijection, alors la composée $g \circ f$ est une bijection de E vers G, et sa bijection réciproque est :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

ATTENTION

aux ensembles de départ et d'arrivée dans la première assertion du théorème.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x \quad \text{MAIS} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x.$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

Preuve : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une bijection.

— La composée $f^{-1} \circ f$ existe et est définie de E dans E.

De plus, tout x de E est l'unique antécédent de $f(x)$ par f par définition donc

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \textit{i.e.} \quad f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{E}}.$$

De même $f \circ f^{-1}$ existe et va de F dans F et on a $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ car $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f d'après la définition (23) de f^{-1}.

D'où $f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{F}}$.

— Soient $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ une autre bijection et $y \in \mathrm{G}$.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathrm{E},\ (g \circ f)(x) = y &\iff g(f(x)) = y \iff f(x) = g^{-1}(y)\\ &\iff x = f^{-1}(g^{-1}(y)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(y).\end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarques : Dans une structure algébrique, l'inversibilité d'un élément a se traduit par l'existence de b tel que $ab = ba = 1$ (ou 1 est le neutre multiplicatif de la structure).

Si on a seulement l'existence de b tel que $ab = 1$, on parle d'inversibilité à droite de a, et de même, d'inversibilité à gauche si $ba = 1$.

Pour une fonction $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, l' exercice (13) et l' exercice (15) montrent que les propriétés d'injectivité, surjectivité et bijectivité peuvent être vues comme des propriétés dans $\mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ d'inversibilité à gauche, droite et bilatéral respectivement :

f est injective $\iff \exists\, g \in \mathscr{F}(\mathrm{F},\mathrm{E}) \,/\, g \circ f = id_{\mathrm{E}} \iff$ f est inversible à gauche dans F^{E}.

f est surjective $\iff \exists\, g \in \mathscr{F}(\mathrm{F},\mathrm{E}) \,/\, f \circ g = id_{\mathrm{F}} \iff$ f est inversible à droite dans F^{E}.

et si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$,

f est bijective $\iff \exists\, g \in \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{E}) \,/\, f \circ g = g \circ f = id_{\mathrm{E}} \iff$ f est inversible dans E^{E}.

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

— On dit que f est une *involution* si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.

Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

— Dans le plan, les symétries sont des involutions.

— La fonction $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.

— La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

— On dit que f est *idem-potente* si $f \circ f = f$.

Exemples 25 :

— Dans le plan, toute projection est idem-potente.

— L'identité, la valeur absolue (le module dans $\mathbb{C}$) ou la partie entière, vérifient cette propriété.

Exercice 16 : Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x-y) \end{array}$.

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;xy) \end{array}$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour montrer que f est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 5 (Montrer qu'une fonction est bijective) :
On montre que f est continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.

Cette méthode est simple à appliquer car il suffit de justifier que f est continue sur I et d'étudier ses variations pour montrer qu'elle est bijective.

Par contre, cette méthode ne donne pas l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 17 : Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $[-1\,;0]$.

Méthode 6 (Montrer qu'une fonction est bijective) :
Pour tout $y \in \mathrm{F}$, on montre que l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) possède une unique solution qui est, par définition, $x = f^{-1}(y)$.

Cette méthode, en général plus compliquée que la précédente, permet néanmoins d'obtenir l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 18 : Montrer que la fonction $g :]-1\,;+\infty[\longmapsto]-\infty\,;1[$ définie par $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

VIII.2 Courbe représentative

Proposition 19 :
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une bijection de I sur J.

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

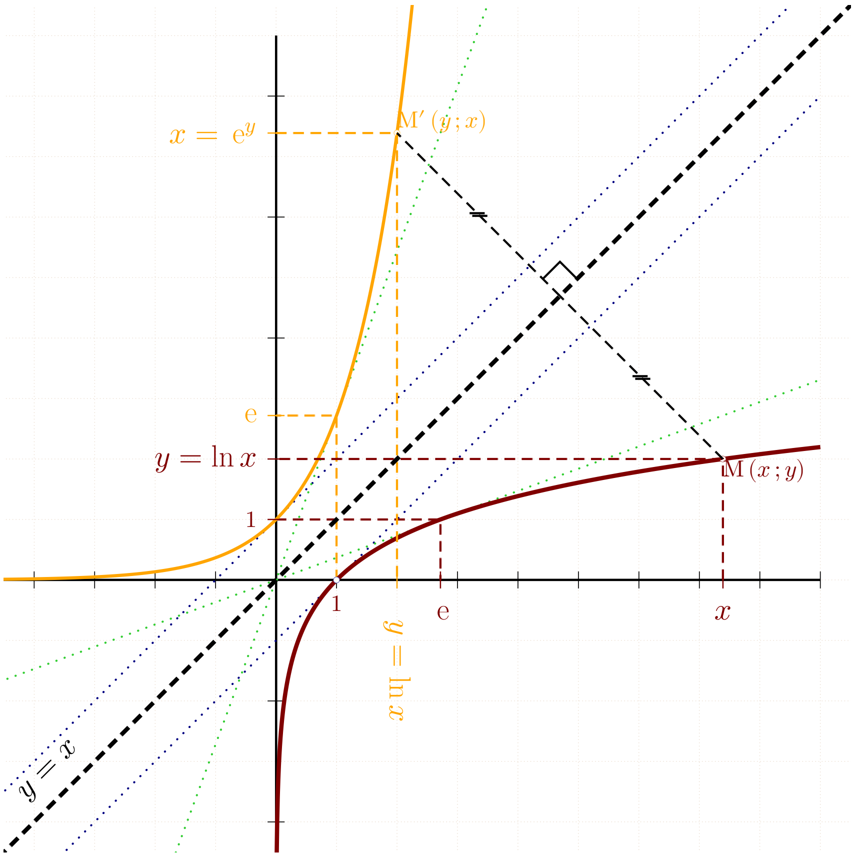


Figure IV.22 – Les courbes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Preuve : Notons $\mathcal{G}$ le graphe de f et $\mathcal{G}'$ celui de f^{-1}.

Soit $\mathrm{M}(x\,;y) \in \mathcal{G}$. Alors $y = f(x)$.

Le symétrique de M par rapport à la première bissectrice est :

$$(y\,;x) = (f(x)\,;x) = \left(f(x)\,;f^{-1}(f(x))\right) \in \mathcal{G}'.$$

Réciproquement, si $\mathrm{M}(x\,;y) \in \mathcal{G}'$, $y = f^{-1}(x)$.

M est le symétrique par rapport à la première bissectrice du point

$$(y\,;x) = (f^{-1}(x)\,;x) = \left(f^{-1}(x)\,;f(f^{-1}(x))\right) = (x\,;f(x)),$$

donc d'un point de $\mathcal{G}$.

Exercice 19 : Tracer l'allure de la courbe représentative de arccos $= (\cos)^{-1}$ à partir du graphe de cos sur $[0\,;\pi]$.

VIII.3 Dérivabilité et Continuité

Théorème 20 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :
Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

1. **Variations :** Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} l'est aussi et de même monotonie.
2. **Continuité :** Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J.
3. **Dérivabilité :** Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :
$$\forall\, b \in \mathrm{J},\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$

Preuve : Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection *i.e.* $\forall\, y \in \mathrm{J},\ \exists! x \in \mathrm{I}$ tel que $y = f(x)$.

1. On se place dans le cas d'une fonction strictement croissante (La démonstration se fait facilement par analogie lorsque la fonction est strictement décroissante).

   Soit $(y_1, y_2) \in \mathrm{J}^2$ tel que $y_1 < y_2$, et soient $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ *i.e.* $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$

   On a donc $f(x_1) < f(x_2)$.

   Comme f est strictement croissante, si l'on avait $x_1 \geqslant x_2$ alors on aurait $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ce qui n'est pas possible.

   Donc $x_1 < x_2 \iff f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante.
2. Admis pour l'instant.
3. Soient $b = f(a) \in \mathrm{J}$, $y \in \mathrm{J} \setminus \{b\}$ et $x \in \mathrm{I}$, l'unique antécédent de y par f.

   On a :
$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}},$$
   où $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ par injectivité de f^{-1}.

   De plus, par continuité de f^{-1} sur J, $f^{-1}(y) = x$ tend vers $f^{-1}(b) = a$ quand y tend vers b :
$$= \frac{1}{\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}},$$
   où $f(x) \neq f(a)$ par injectivité de f.

   Comme f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) \neq 0$, on obtient :
$$= \frac{1}{f'(a)}.$$

f^{-1} est donc dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$.

La dérivabilité étant une notion locale, si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple 26 : La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone.

La fonction exp est donc bijective et sa réciproque $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{x}.$$

Remarque : Si f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ et $f'(a) = 0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ où $b = f(a)$.

Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $\mathrm{M}\,(b\,;a)$.

En particulier f^{-1} n'est pas dérivable en b.

Exemple 27 : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective de réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2x$ ne s'annulant que pour $x = 0$.

Ainsi, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(y)\Big)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

On retrouve que la réciproque de la fonction carrée n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale à l'origine.

Exercice 20 : Soit $\varphi : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J.
3. Déterminer $\left(\varphi^{-1}\right)'(1)$.