Applications

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 4

Sommaire I

I. Le contexte

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle relation binaire entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, appelée graphe de la relation binaire.

$$(x\,;y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F},\ x\mathcal{R}y \iff (x\,;y)\in\mathcal{G}.$$

Dans la pratique, on s'intéressera plutôt aux relations d'un ensemble E dans lui-même.

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle relation binaire entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, appelée graphe de la relation binaire.

$$(x\,;y)\in \mathrm{E}\times\mathrm{F},\ x\mathcal{R}y \iff (x\,;y)\in\mathcal{G}.$$

Exemples 1 :

1. L'égalité sur $\mathrm{E} = \{1, 2, 3\}$ est une relation binaire. Son graphe est $\mathcal{G} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.

$=$	1	2	3
1	$(1,1)$		
2		$(2,2)$	
3			$(3,3)$

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle relation binaire entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, appelée graphe de la relation binaire.

$$(x\,;y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F},\ x\mathcal{R}y \iff (x\,;y) \in \mathcal{G}.$$

Exemples 1 :

2. La relation $\leqslant$ sur $\mathrm{E} = \{1,\ 2,\ 3\}$ est une relation binaire.

$\leqslant$	1	2	3
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
2		$(2,2)$	$(2,3)$
3			$(3,3)$

I. Le contexte
1. Relation binaire

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle relation binaire entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, appelée graphe de la relation binaire.

$$(x\,;y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F},\ x\mathcal{R}y \iff (x\,;y) \in \mathcal{G}.$$

Exemples 1 :

3. La relation $<$ sur $\mathrm{E} = \{1,\ 2,\ 3\}$ est une relation binaire.

$<$	1	2	3
1		$(1,2)$	$(1,3)$
2			$(2,3)$
3			

I. Le contexte

1. Relation binaire

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle relation binaire entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, appelée graphe de la relation binaire.

$$(x\,;y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F},\ x\mathcal{R}y \iff (x\,;y) \in \mathcal{G}.$$

Exemples 1 :

4. La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff 3$ divise $y - x$ est une relation binaire sur $\mathrm{E} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5\}$.

$\mathcal{R}$	0	1	2	3	5
0	$(0,0)$			$(0,3)$	
1		$(1,1)$			
2			$(2,2)$		$(2,5)$
3	$(3,0)$			$(3,3)$	
5			$(5,2)$		$(5,5)$

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle relation binaire entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, appelée graphe de la relation binaire.

$$(x\,;y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F},\ x\mathcal{R}y \iff (x\,;y)\in\mathcal{G}.$$

Exemples 1 :

5. La relation $\subset$ est une relation binaire sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle relation binaire entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, appelée graphe de la relation binaire.

$$(x\,;y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F},\ x\mathcal{R}y \iff (x\,;y) \in \mathcal{G}.$$

Exemples 1 :

5. La relation $\subset$ est une relation binaire sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.
6. Dans le plan, les relations // et $\perp$ sont des relations binaires de l'ensemble des droites, la colinéarité sur l'ensemble des vecteurs,...

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathcal{R}$ est :

- Réflexive lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ x\mathcal{R}x.$$

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathcal{R}$ est :

- **Réflexive** lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ x\mathcal{R}x.$$

- **Symétrique** lorsque le graphe de $\mathcal{R}$ est symétrique :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathcal{R}$ est :

- **Réflexive** lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ x\mathcal{R}x.$$

- **Symétrique** lorsque le graphe de $\mathcal{R}$ est symétrique :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$

- **Antisymétrique** lorsque :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y.$$

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathcal{R}$ est :

- **Réflexive** lorsque tout élément est en relation avec lui-même :
$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ x\mathcal{R}x.$$
- **Symétrique** lorsque le graphe de $\mathcal{R}$ est symétrique :
$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$
- **Antisymétrique** lorsque :
$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y.$$
- **Transitive** lorsque :
$$\forall\, x, y, z \in \mathrm{E},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y-x$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y-x$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.
- La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y - x$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.
- La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $//$ est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y-x$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.
- La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $/\!/$ est réflexive, symétrique et transitive.
- La relation $\perp$ est symétrique.

Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y-x$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.
- La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $/\!/$ est réflexive, symétrique et transitive.
- La relation $\perp$ est symétrique.
- La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.

Les relations d'égalité, de parallélismes, d'équivalence, de colinéarité de vecteurs non nuls sont toutes des relations réflexives, symétriques et transitives dans leur ensemble respectif.

Les relations d'égalité, de parallélismes, d'équivalence, de colinéarité de vecteurs non nuls sont toutes des relations réflexives, symétriques et transitives dans leur ensemble respectif.

De même, les relations de comparaison large et d'inclusion sont toutes deux réflexives, anti-symétriques et transitives.

Définition 2 :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

I. Le contexte

2. Relation d'équivalence

Définition 2 :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice 1 :

On définit sur $\mathbb{C}$ une relation binaire en posant

$$\forall\ (z\,;z') \in \mathbb{C}^2, \quad (z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.

Définition 2 :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice 1 :

On définit sur $\mathbb{C}$ une relation binaire en posant

$$\forall\ (z\,;z') \in \mathbb{C}^2, \quad \left(z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|\right).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, déterminer l'ensemble des éléments en relation avec z ce que l'on appelle sa classe d'équivalence.

Exemples 3 :

- La relation définie dans $\mathbb{R}$, par $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, est une relation d'équivalence.

  Cette relation est appelée la congruence modulo 2π dans $\mathbb{R}$, et on note

  $$\forall\, x, y \in \mathbb{Z},\ x \equiv y\ [2\pi] \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi.$$

  Les représentants de chaque classe dans l'intervalle $]\pi\,;\pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle considéré : $\dfrac{13\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exemples 3 :

- La relation définie dans $\mathbb{R}$, par $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, est une relation d'équivalence.
  Cette relation est appelée la congruence modulo 2π dans $\mathbb{R}$, et on note
  $$\forall\, x, y \in \mathbb{Z},\ x \equiv y\ [2\pi] \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi.$$
  Les représentants de chaque classe dans l'intervalle $]\pi\,;\pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle considéré : $\dfrac{13\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
- Dans $\mathbb{Q}$, la relation $\tilde{=}$ définie par $\forall\left(\dfrac{a}{b}\,;\dfrac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2,\ \dfrac{a}{b} \tilde{=} \dfrac{c}{d} \iff ad - bc = 0$ est une relation d'équivalence dont les représentants des (nombreuses) classes sont les fractions irréductibles : $3 \times 35 = 7 \times 15 \iff \dfrac{3}{7} \tilde{=} \dfrac{15}{35}$.

Vocabulaire : Soit E un ensemble non vide. On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble des éléments en relation avec lui.

- Les classes d'équivalence sont des parties de E non vides et deux à deux disjointes.

Vocabulaire : Soit E un ensemble non vide. On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble des éléments en relation avec lui.

- Les classes d'équivalence sont des parties de E non vides et deux à deux disjointes.
- La réunion des classes d'équivalence est égale à E.

Vocabulaire : Soit E un ensemble non vide. On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble des éléments en relation avec lui.

- Les classes d'équivalence sont des parties de E non vides et deux à deux disjointes.
- La réunion des classes d'équivalence est égale à E.

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E.

Définition 3 :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- On dit alors que (E, $\mathcal{R}$) est un ensemble ordonné.

Définition 3 :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- On dit alors que $(\mathrm{E}, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.
- Deux éléments x et y de E sont dits comparables pour l'ordre $\mathcal{R}$ lorsque l'on a $x\mathcal{R}y$ ou bien $y\mathcal{R}x$.

Définition 3 :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- On dit alors que $(\mathrm{E}, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.
- Deux éléments x et y de E sont dits comparables pour l'ordre $\mathcal{R}$ lorsque l'on a $x\mathcal{R}y$ ou bien $y\mathcal{R}x$.
- Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, on dit que l'ordre $\mathcal{R}$ est total et que $(\mathrm{E}, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné, partiel dans l'autre cas.

Exemples 4 :

- L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.

Exemples 4 :

- L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.
- Soit E un ensemble, $(\mathcal{P}(\mathrm{E}), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné.

Exemples 4 :

- L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.
- Soit E un ensemble, $(\mathcal{P}(\mathrm{E}), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné.
- Soit I un ensemble non vide, on pose $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles et on la relation $\mathcal{R}$:

$$\forall\, f, g \in \mathrm{E},\ f \mathcal{R} g \iff \forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant g(x).$$

  $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel appelée ordre fonctionnel.

Exemples 4 :

- L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.
- Soit E un ensemble, $(\mathcal{P}(\mathrm{E}), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné.
- Soit I un ensemble non vide, on pose $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles et on la relation $\mathcal{R}$:

$$\forall f, g \in \mathrm{E},\ f\mathcal{R}g \iff \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant g(x).$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel appelée ordre fonctionnel.

ATTENTION

La négation de $x \leqslant y$ est :

x et y ne sont pas comparables OU x et y sont comparables et $x > y$.

Exercice 2 :

On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\prec$ définie par

$$(x,y) \prec (x',y') \iff x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

1. Démontrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total ?

Exercice 2 :

On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\prec$ définie par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

1. Démontrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total ?
2. Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ?

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, M \in E,\ \forall\, x \in A,\ x \leqslant M$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in E,\ \forall\, x \in A,\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un maximum lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un maximum lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
- A admet un minimum lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un maximum lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
- A admet un minimum lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

ATTENTION

- Une partie d'un ensemble ordonné n'est pas forcément majorée (ou minorée), par exemple $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un maximum lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
- A admet un minimum lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

ATTENTION

- Une partie d'un ensemble ordonné n'est pas forcément majorée (ou minorée), par exemple $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$.
- Les majorants et minorants ne sont pas uniques.

Définition 4 (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un maximum lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
- A admet un minimum lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

ATTENTION

- Une partie d'un ensemble ordonné n'est pas forcément majorée (ou minorée), par exemple $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$.
- Les majorants et minorants ne sont pas uniques.
- Les majorants et minorants n'appartiennent pas forcément à l'ensemble mais quand ils le sont, ce sont des maxima et minima réciproquement.

Proposition 2 (Unicité des extrema) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- Si A est majorée par un majorant β qui est dans A alors celui-ci est unique. On l'appelle LE maximum de A et on note $\beta = \max(\mathrm{A})$.

Proposition 2 (Unicité des extrema) :

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- Si A est majorée par un majorant β qui est dans A alors celui-ci est unique. On l'appelle LE maximum de A et on note $\beta = \max(A)$.
- Si A est minorée par un minorant α qui est dans A alors celui-ci est unique. On l'appelle LE minimum de A et on note $\alpha = \min(A)$.

Proposition 2 (Unicité des extrema) :

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- Si A est **majorée** par un majorant β qui est dans A alors celui-ci est unique. On l'appelle LE maximum de A et on note $\beta = \max(A)$.
- Si A est **minorée** par un minorant α qui est dans A alors celui-ci est unique. On l'appelle LE minimum de A et on note $\alpha = \min(A)$.

Les maxima et minima n'existent pas forcément même pour une partie bornée mais, s'ils existent, ils sont uniques. C'est ce qui justifie les notation $\max(A)$ et $\min(A)$.

Exemple 5 :

L'intervalle $[0\,;1[$ est borné par 0 et 1 mais n'admet qu'un minimum 0 et pas de maximum.

II. Applications

La notion d'applications (ou fonctions) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

Définition 5 :

Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle application (ou fonction) de E dans F toute relation $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{F}^2,\ x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.

La notion d'applications (ou fonctions) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

Définition 5 :

Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle application (ou fonction) de E dans F toute relation $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{F}^2,\ x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée.

La notion d'applications (ou fonctions) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

Définition 5 :

Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle application (ou fonction) de E dans F toute relation $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{F}^2,\ x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée.
- y est l'image de x par $\mathcal{R}$ que l'on notera plutôt $y = \mathcal{R}(x)$.

La notion d'applications (ou fonctions) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

Définition 5 :

Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle application (ou fonction) de E dans F toute relation $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{F}^2,\ x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée.
- y est l'image de x par $\mathcal{R}$ que l'on notera plutôt $y = \mathcal{R}(x)$.
- x est un antécédent de y par $\mathcal{R}$.

La notion d'applications (ou fonctions) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

Définition 5 :

Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle application (ou fonction) de E dans F toute relation $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{F}^2,\ x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée.
- y est l'image de x par $\mathcal{R}$ que l'on notera plutôt $y = \mathcal{R}(x)$.
- x est un antécédent de y par $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{G}$ est le graphe de la relation. C'est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

La notion d'applications (ou fonctions) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

Définition 5 :

Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle application (ou fonction) de E dans F toute relation $\mathcal{R} = (\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\,;\mathcal{G})$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{F}^2,\ x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée.
- y est l'image de x par $\mathcal{R}$ que l'on notera plutôt $y = \mathcal{R}(x)$.
- x est un antécédent de y par $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{G}$ est le graphe de la relation. C'est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

L'ensemble des fonctions E vers F est noté $\mathcal{F}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou encore F^{E}.

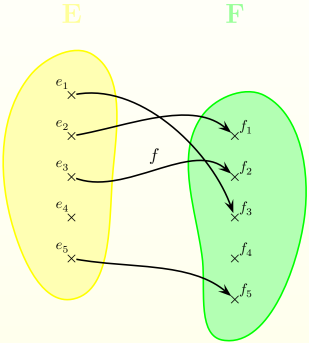


Figure 1 – Diagramme sagittal d'une fonction qui n'est pas une application.

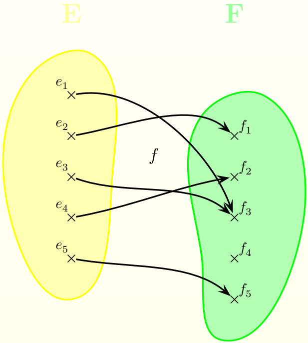


Figure 2 – Diagramme sagittal d'une application.

Dans la suite et comme demandé dans le programme, nous ne ferons plus la différence entre ces deux termes. Celui de « fonction » nous permettant, par exemple, de chercher le domaine de définition de la fonction $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

En d'autres termes, définir l'application $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}$.

Définir une application nécessite donc la donnée de E, de F et du graphe $\mathcal{G}$, ce qui revient à définir, d'une façon ou d'une autre, un élément $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Pour désigner une application on utilise en général une lettre minuscule. Si f est une application de E vers F on écrit plus simplement :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ & x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

et le graphe de f est l'ensemble $\mathcal{G}_f = \left\{ (x\,;f(x)) \;/\; x \in \mathrm{E}\right\}$.

Vocabulaire :

- Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, on parle de fonction de la variable réelle ou, plus simplement, de fonction réelle.

Définir une application nécessite donc la donnée de E, de F et du graphe $\mathcal{G}$, ce qui revient à définir, d'une façon ou d'une autre, un élément $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Pour désigner une application on utilise en général une lettre minuscule. Si f est une application de E vers F on écrit plus simplement :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ & x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

et le graphe de f est l'ensemble $\mathcal{G}_f = \{ (x\,;f(x)) \;/\; x \in \mathrm{E} \}$.

Vocabulaire :

- Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, on parle de fonction de la variable réelle ou, plus simplement, de fonction réelle.
- Si $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on parlera de fonction à valeurs réelles ou complexes réciproquement.

Exemples 6 :

- L'exponentielle est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

Exemples 6 :

- L'exponentielle est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
- Le logarithme est une application de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples 6 :

- L'exponentielle est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
- Le logarithme est une application de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application car 0 n'a pas d'image. Son ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

  En conséquence, l'application $\left(\dfrac{1}{x}\right)_{|\mathcal{D}_f} : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ est correctement définie.

Exemples 6 :

- L'exponentielle est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
- Le logarithme est une application de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application car 0 n'a pas d'image. Son ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

  En conséquence, l'application $\left(\dfrac{1}{x}\right)_{|\mathcal{D}_f} : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ est correctement définie.
- Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Le schéma :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1} : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathrm{A} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathrm{B} \end{cases} \end{array}$$

  n'est celui d'une fonction sur E que si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

Définition 6 (Domaine de définition) :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathrm{A} \,/\, f(x) \text{ existe}\}.$$

Si $x \in \mathcal{D}_f$ et si $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'image de x par f,

Définition 6 (Domaine de définition) :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathrm{A} \,/\, f(x) \text{ existe}\}.$$

Si $x \in \mathcal{D}_f$ et si $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'image de x par f,
- x est un antécédent de y par f (pas forcément unique).

Définition 6 (Domaine de définition) :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathrm{A} \,/\, f(x) \text{ existe}\}.$$

Si $x \in \mathcal{D}_f$ et si $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'image de x par f,
- x est un antécédent de y par f (pas forcément unique).

Toute étude de fonction f DEVRA donc commencer par préciser son domaine de définition.

Méthode 1 :

À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

1. Les expressions de la forme $\dfrac{\ldots}{\boxed{}}$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \neq 0$.

   Une équation à résoudre ...

Méthode 1 :

À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

1. Les expressions de la forme $\dfrac{\dots}{\boxed{}}$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \neq 0$.

   Une équation à résoudre ...

2. Les expressions de la forme $\sqrt{\boxed{}}$ ou $\ln\left(\boxed{}\right)$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \geqslant 0$ ou $\boxed{} > 0$. Une étude de signes à faire ...

Méthode I :

À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

1. Les expressions de la forme $\dfrac{\cdots}{\boxed{\quad}}$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{\quad} \neq 0$.

   Une équation à résoudre ...

2. Les expressions de la forme $\sqrt{\boxed{\quad}}$ ou $\ln\left(\boxed{\quad}\right)$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{\quad} \geqslant 0$ ou $\boxed{\quad} > 0$. Une étude de signes à faire ...

Exercice 3 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

Méthode 1 :

À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

1. Les expressions de la forme $\dfrac{\dots}{\boxed{}}$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \neq 0$.

   Une équation à résoudre ...

2. Les expressions de la forme $\sqrt{\boxed{}}$ ou $\ln\left(\boxed{}\right)$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \geqslant 0$ ou $\boxed{} > 0$. Une étude de signes à faire ...

Exercice 3 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $x \longmapsto \sqrt{x^2-4x+3}$

Méthode I :

À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

1. Les expressions de la forme $\dfrac{\dots}{\boxed{}}$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \neq 0$.
   Une équation à résoudre ...
2. Les expressions de la forme $\sqrt{\boxed{}}$ ou $\ln\left(\boxed{}\right)$: Il suffira de s'assurer que $\boxed{} \geqslant 0$ ou $\boxed{} > 0$. Une étude de signes à faire ...

Exercice 3 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $x \longmapsto \sqrt{x^2-4x+3}$
3. $x \longmapsto \ln|\ln x|$

Définition 7 (Identité d'un ensemble) :

Soit E un ensemble.

L'identité de E est l'application de E dans E qui à chaque élément de E associe lui-même. On la note :

$$\begin{array}{rccl} id_{\mathrm{E}} : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & x & \longmapsto & id_{\mathrm{E}}(x) = x \end{array}.$$

Définition 7 (Identité d'un ensemble) :

Soit E un ensemble.

L'identité de E est l'application de E dans E qui à chaque élément de E associe lui-même. On la note :

$$id_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & id_{\mathrm{E}}(x) = x \end{array}.$$

Exemples 7 (Important) :

- La fonction nulle sur un ensemble E est définie par $0_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}.$

Définition 7 (Identité d'un ensemble) :

Soit E un ensemble.

L'identité de E est l'application de E dans E qui à chaque élément de E associe lui-même. On la note :

$$id_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & id_{\mathrm{E}}(x) = x \end{array}.$$

Exemples 7 (Important) :

- La fonction nulle sur un ensemble E est définie par $0_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$.
- Soit $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. L'injection canonique $i : \mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{F}$ définie par $\forall\, x \in \mathrm{E},\ i(x) = x \in \mathrm{F}$.

Définition 7 (Identité d'un ensemble) :

Soit E un ensemble.

L'identité de E est l'application de E dans E qui à chaque élément de E associe lui-même. On la note :

$$id_{\mathrm{E}} : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & id_{\mathrm{E}}(x) = x \end{array}.$$

Exemples 7 (Important) :

- La fonction nulle sur un ensemble E est définie par $0_{\mathrm{E}} : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$.
- Soit $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. L'injection canonique $i : \mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{F}$ définie par $\forall\, x \in \mathrm{E},\ i(x) = x \in \mathrm{F}$.
- La projection canonique $p_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ définie par $p_{\mathrm{E}}\big(\,(x\,;y)\,\big) = x$.

ATTENTION

Égalité de fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si, et seulement si elles ont :

- le même ensemble de départ E,

ATTENTION

Égalité de fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si, et seulement si elles ont :

- le même ensemble de départ E,
- le même ensemble d'arrivée F,

ATTENTION

Égalité de fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si, et seulement si elles ont :

- le même ensemble de départ E,
- le même ensemble d'arrivée F,
- le même graphe *i.e.* $\forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) = g(x)$.

ATTENTION

Égalité de fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si, et seulement si elles ont :

- le même ensemble de départ E,
- le même ensemble d'arrivée F,
- le même graphe *i.e.* $\forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) = g(x)$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et la fonction $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2$ ne sont pas égales !

Définition 8 (Coïncidence) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}'$ deux applications.

On dit que f et g **coïncident** sur une partie A de $\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ si $\forall\, x \in \mathrm{A},\ f(x) = g(x)$.

Définition 8 (Coïncidence) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}'$ deux applications.

On dit que f et g **coïncident** sur une partie A de $\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ si $\forall\, x \in \mathrm{A},\ f(x) = g(x)$.

Exemple 8 :

$f : x \longmapsto \ln(x^2)$ et $f : x \longmapsto 2\ln(x)$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ sans être égales.

Définition 9 (Restriction) :

Soient $f: \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle restriction de f à A, notée $f_{|\mathrm{A}}$, l'application définie par :

$$f_{|\mathrm{A}}: \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Définition 9 (Restriction) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle restriction de f à A, notée $f_{|\mathrm{A}}$, l'application définie par :

$$f_{|\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Une fonction f et sa restriction $f_{|\mathrm{A}}$ à une partie A coïncident donc sur A.

Définition 9 (Restriction) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle restriction de f à A, notée $f_{|\mathrm{A}}$, l'application définie par :

$$f_{|\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Une fonction f et sa restriction $f_{|\mathrm{A}}$ à une partie A coïncident donc sur A.

Exemple 9 :

La valeur absolue $|\ | : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est la restriction à $\mathbb{R}$ du module $|\ | : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R}_+$.

Définition 10 (Prolongement) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$, on appelle prolongement de f à E', notée en général $\tilde{f}$, l'application $\tilde{f} : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}$ qui coïncide avec f sur E.

Définition 10 (Prolongement) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$, on appelle prolongement de f à E', notée en général $\tilde{f}$, l'application $\tilde{f} : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}$ qui coïncide avec f sur E.

Remarque : La fonction f est alors une restriction de $\tilde{f}$ sur E.

Définition 10 (Prolongement) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$, on appelle prolongement de f à E', notée en général $\tilde{f}$, l'application $\tilde{f} : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}$ qui coïncide avec f sur E.

Remarque : La fonction f est alors une restriction de $\tilde{f}$ sur E.

Exemples 10 :

- $x \longmapsto \ln|x|$ est un prolongement de ln à $\mathbb{R}^*$.
- Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on peut prolonger $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ à $\mathbb{R}$ en posant :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Définition 11 (Corestriction) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F. Si B est une partie de F telle que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$, on appelle corestriction de f à B, notée $f^{|\mathrm{B}}$, l'application définies par :

$$f^{|\mathrm{B}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Définition 11 (Corestriction) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F. Si B est une partie de F telle que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$, on appelle corestriction de f à B, notée $f^{|\mathrm{B}}$, l'application définies par :

$$f^{|\mathrm{B}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Pour des raisons pratiques, il nous arrivera fréquemment de corestreindre une application $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ à son image $f(\mathrm{I})$ et de considérer $\tilde{f} : \mathrm{I} \longmapsto f(\mathrm{I})$.

Définition 11 (Corestriction) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F. Si B est une partie de F telle que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$, on appelle corestriction de f à B, notée $f^{|\mathrm{B}}$, l'application définies par :

$$f^{|\mathrm{B}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Pour des raisons pratiques, il nous arrivera fréquemment de corestreindre une application $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ à son image $f(\mathrm{I})$ et de considérer $\tilde{f} : \mathrm{I} \longmapsto f(\mathrm{I})$.

Remarque : Si la restriction d'une application est toujours possible, ce n'est pas le cas de la corestriction à une partie B de F qui nécessite que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$.

Définition 11 (Corestriction) :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F. Si B est une partie de F telle que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$, on appelle corestriction de f à B, notée $f^{|\mathrm{B}}$, l'application définies par :

$$f^{|\mathrm{B}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Pour des raisons pratiques, il nous arrivera fréquemment de corestreindre une application $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ à son image $f(\mathrm{I})$ et de considérer $\tilde{f} : \mathrm{I} \longmapsto f(\mathrm{I})$.

Remarque : Si la restriction d'une application est toujours possible, ce n'est pas le cas de la corestriction à une partie B de F qui nécessite que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{B}$.

Exemple 11 :

Soit $\chi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, on peut définir $\chi^{|[-2,+\infty[}$ et $\chi^{|[0,+\infty[}$, mais pas $\chi^{|[1,2]}$.

Définition 12 (Fonction indicatrice) :

Soit A une partie d'un ensemble E.

On appelle fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$, l'application de E dans $\{0\,;1\}$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_{\mathrm{A}} : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathrm{A}, \\ 0 \text{ si } x \notin \mathrm{A}. \end{cases} \end{array}$$

Définition 13 (Somme, produit et quotient de fonctions) :

Soient E et F deux ensembles, f et g deux fonctions définies sur E à valeurs dans F.

- On appelle fonction somme de f et g, notée $f+g$, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Définition 13 (Somme, produit et quotient de fonctions) :

Soient E et F deux ensembles, f et g deux fonctions définies sur E à valeurs dans F.

- On appelle fonction somme de f et g, notée $f+g$, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
- On appelle fonction produit de f et g, notée $f \times g$ ou fg, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f\times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

Définition 13 (Somme, produit et quotient de fonctions) :

Soient E et F deux ensembles, f et g deux fonctions définies sur E à valeurs dans F.

- On appelle fonction somme de f et g, notée $f+g$, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- On appelle fonction produit de f et g, notée $f \times g$ ou fg, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

- Si g ne s'annule pas sur E, on appelle fonction quotient de f et g, notée $\dfrac{f}{g}$, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Définition 13 (Somme, produit et quotient de fonctions) :

Soient E et F deux ensembles, f et g deux fonctions définies sur E à valeurs dans F.

- On appelle fonction somme de f et g, notée $f+g$, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
- On appelle fonction produit de f et g, notée $f \times g$ ou fg, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$
- Si g ne s'annule pas sur E, on appelle fonction quotient de f et g, notée $\dfrac{f}{g}$, la fonction définie par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction λf par :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble des fonctions de E dans F récupère alors, par l'intermédiaire des ces définitions, les propriétés de l'ensemble d'arrivée F.

Par exemple, si F est une partie de $\mathbb{R}$, la somme et le produit de deux fonctions sont associatifs, commutatifs et le produit est distributif sur l'addition.

Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une application coïncide avec l'ensemble de départ d'une autre application, alors il est possible « d'enchaîner » les deux, c'est la composition :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E} & \longmapsto & \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{G} \\ x & & f(x) & & g(f(x)) \end{array}$$

Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une application coïncide avec l'ensemble de départ d'une autre application, alors il est possible « d'enchaîner » les deux, c'est la composition :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E} & \longmapsto & \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{G} \\ x & & f(x) & & g(f(x)) \end{array}$$

Définition 14 (Composée de fonctions) :

Soient E, F, E′ et G′ des ensembles et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, $g : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}'$ deux applications telles que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}'$.

La composée de f par g, notée $g \circ f$, est l'application de E sur F′ définie par :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F}' \\ & x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Lorsque l'on a deux applications $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{H} \longmapsto \mathrm{G}$ avec seulement $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ (au lieu de $\mathrm{F} = \mathrm{H}$) la définition n'autorise théoriquement pas la construction de $g \circ f$.

Néanmoins si $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{H}$, on peut considérer la composée $g_{|f(\mathrm{E})} \circ f^{|f(\mathrm{E})}$ que l'on écrira encore, par abus de langage et soucis de simplicité, $g \circ f$.

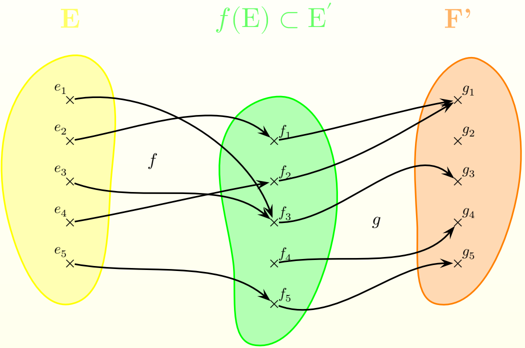
Lorsque l'on a deux applications $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{H} \longmapsto \mathrm{G}$ avec seulement $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ (au lieu de $\mathrm{F} = \mathrm{H}$) la définition n'autorise théoriquement pas la construction de $g \circ f$.

Néanmoins si $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{H}$, on peut considérer la composée $g_{|f(\mathrm{E})} \circ f^{|f(\mathrm{E})}$ que l'on écrira encore, par abus de langage et soucis de simplicité, $g \circ f$.

ATTENTION

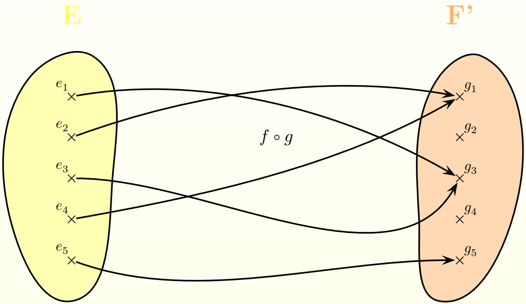
La condition $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}'$ ou encore « f est à valeurs dans E' » est particulièrement importante.

On doit garantir que $f(x)$ appartienne au domaine de définition de g pour tout x de E.



$$f(\mathrm{E}) = \{f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_5\} \subset \mathrm{E}' \text{ et } g(\mathrm{E}') = \{g_1,\, g_3,\, g_4,\, g_5\} \subset \mathrm{F}'$$

Figure 3 – Diagramme sagittal d'une composée



$$(g \circ f)(\mathrm{E}) = \{g_1,\, g_3,\, g_5\} \subset g(\mathrm{E}') \subset \mathrm{F}'.$$

Figure 4 – Diagramme sagittal d'une composée

Exemple 12 :

L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est $]0\,;2[$.

Lorsque f est une application d'un ensemble E vers lui-même, alors on peut composer f avec elle-même, et autant de fois que l'on veut et on notera

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n fois}}.$$

Par convention, on pose $f^0 = id_{\mathrm{E}}$.

Lorsque f est une application d'un ensemble E vers lui-même, alors on peut composer f avec elle-même, et autant de fois que l'on veut et on notera

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n fois}}.$$

Par convention, on pose $f^0 = id_{\mathrm{E}}$.

Exemple 13 :

Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \text{ stable par } f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

En particulier, $u_{n+1} = f^{n+1}(u_0)$.

ATTENTION

Sauf cas particulier, $f \circ g \neq g \circ f$. La composition n'est pas une opération commutative.

L'existence de $g \circ f$ ne garantie pas celle de $f \circ g$.

Comparez, par exemple, les domaines de définitions de $x \longmapsto \ln|x|$ et $x \longmapsto |\ln(x)|$.

Exercice 4 :

Déterminer, si possible, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ et préciser leur domaine de définition.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}$

Exercice 4 :

Déterminer, si possible, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ et préciser leur domaine de définition.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Exercice 4 :

Déterminer, si possible, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ et préciser leur domaine de définition.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$

Théorème 3 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ et $h : \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{H}$ trois applications.

- $id_{\mathrm{F}} \circ f = f$ et $f \circ id_{\mathrm{E}} = f$. On dit que l'identité est élément neutre pour la composition.

Théorème 3 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ et $h : \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{H}$ trois applications.

- $id_{\mathrm{F}} \circ f = f$ et $f \circ id_{\mathrm{E}} = f$. On dit que l'identité est élément neutre pour la composition.
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. La composition est associative.

III. Aspects qualitatifs

III. Aspects qualitatifs

1. Graphe d'une fonction

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe correspond au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des éléments $(x\,;f(x))$, pour $x \in \mathcal{D}_f$.

On se place dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ orthonormé direct.

Définition 15 (Graphe d'une fonction) :

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et à valeurs réelles.

On appelle courbe représentative de f ou graphe de f, et on note $\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{G}$, l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ définit par :

$$\mathcal{C}_f = \left\{ (x\,;y) \ / \ (x \in \mathcal{D}_f) \wedge \Big(y = f(x)\Big) \right\}.$$

On ne peut pas toujours tracer la représentation d'une fonction. Par exemple, la courbe de $f : x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ produit des oscillations non représentables au voisinage de 0.

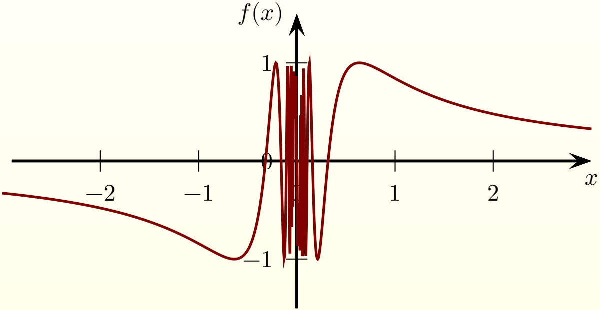


Figure 5 – La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas représentable au voisinage de 0.

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- $x \mapsto f(x - a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\imath}$.

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- $x \mapsto f(x - a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\imath}$.
- $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par une symétrie d'axe $x = \dfrac{a}{2}$.

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- $x \mapsto f(x - a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\imath}$.
- $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par une symétrie d'axe $x = \dfrac{a}{2}$.
- $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\dfrac{1}{a}$.$_{(a \neq 0)}$

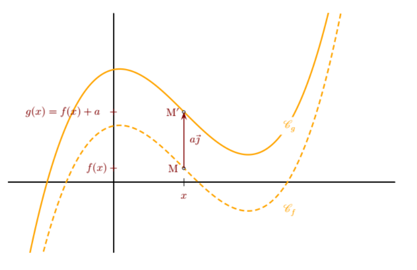
Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- $x \mapsto f(x - a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\imath}$.
- $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par une symétrie d'axe $x = \dfrac{a}{2}$.
- $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\dfrac{1}{a}$.$(a \neq 0)$
- $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a.

Cette proposition donne tout son intérêt aux fonctions, dites de référence :

- $x \longmapsto x$
- $x \longmapsto x^2$
- $x \longmapsto x^3$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
- $x \longmapsto \ln x$
- $x \longmapsto \sin x$
- $x \longmapsto \cos x$
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x$



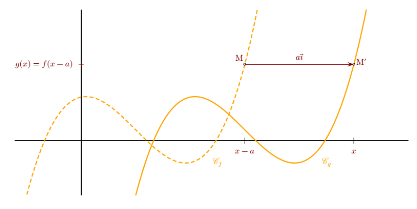


Figure 6 – $x \longmapsto g(x) = f(x) + a$ et $x \longmapsto g(x) = f(x-a)$.

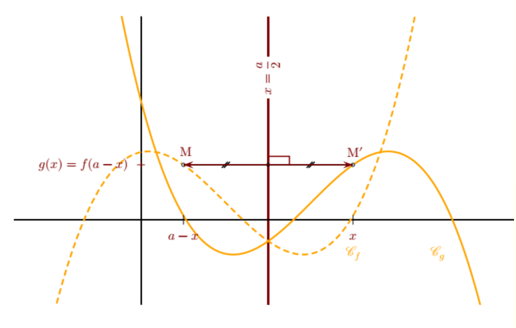
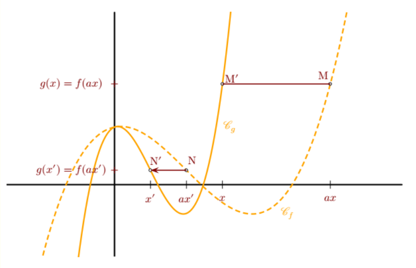


Figure 7 – $x \longmapsto g(x) = f(a-x)$.



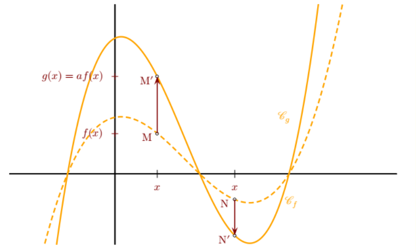


Figure 8 – $x \longmapsto g(x) = f(ax)$ et $x \longmapsto g(x) = af(x)$.

Définition 16 :

- Une fonction f est paire lorsque son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x).$$

Définition 16 :

- Une fonction f est paire lorsque son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x).$$

- Une fonction f est impaire lorsque son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x).$$

Définition 16 :

- Une fonction f est paire lorsque son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x).$$

- Une fonction f est impaire lorsque son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x).$$

Remarque : Le graphe d'une fonction continue et impaire passe toujours par l'origine.

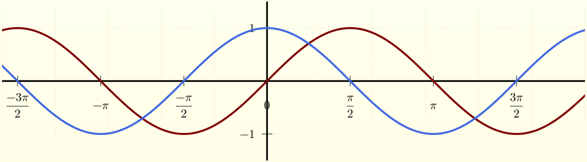


Figure 9 – $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont respectivement paires et impaires.

Exemples 14 :

- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\,|$, $\cos$, ch sont paires.

Exemples 14 :

- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\ |$, cos, ch sont paires.
- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, sin, sh et tan sont impaires.

Exemples 14 :

- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\ |$, cos, ch sont paires.
- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, sin, sh et tan sont impaires.
- Il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires : $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$.

Exemples 14 :

- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\,|$, cos, ch sont paires.
- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, sin, sh et tan sont impaires.
- Il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires : $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.
- Seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Exemples 14 :

- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\,|$, cos, ch sont paires.
- Les fonctions $x \longmapsto x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, sin, sh et tan sont impaires.
- Il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires : $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.
- Seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Pour mémoire :

Rappel :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Il existe une unique fonction f_p paire et une unique fonction f_i impaire telles que :

$$f = f_p + f_i.$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

f_p et f_i s'appellent respectivement les *partie paire* et *partie impaire* de f.

III. Aspects qualitatifs

3. Parité, imparité et symétrie

Proposition 5 (Interprétation graphique) :

- Une fonction f est paire si, et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

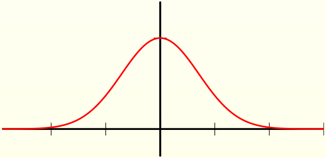


Figure 11 – $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est paire.

Proposition 5 (Interprétation graphique) :

- Une fonction f est paire si, et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction f est impaire si, et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

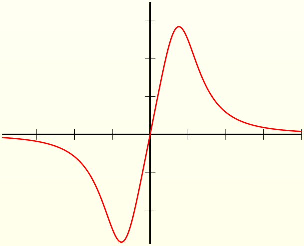


Figure 10 – $x \longmapsto \dfrac{5x}{x^4+1}$ est impaire.

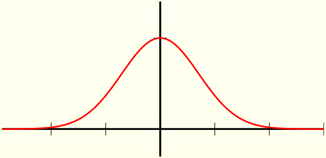


Figure 11 – $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est paire.

Méthode 2 :

Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on restreint son étude au domaine $\mathcal{D}_f \cap [0\,;+\infty[$ et on complète la courbe par symétrie.

IV. Fonctions et relation d'ordre

Définition 17 (Fonctions monotones) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \leqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) < f(y)).$$

Définition 17 (Fonctions monotones) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \leqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) < f(y)).$$

- La fonction f est décroissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \geqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) > f(y)).$$

Définition 17 (Fonctions monotones) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \leqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) < f(y)).$$

- La fonction f est décroissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \geqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) > f(y)).$$

- La fonction f est monotone sur I (resp. strictement monotone) sur I si f est soit croissante (resp. strictement croissante), soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Définition 17 (Fonctions monotones) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \leqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) < f(y)).$$

- La fonction f est décroissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \geqslant f(y)\ (\text{resp. } f(x) > f(y)).$$

- La fonction f est monotone sur I (resp. strictement monotone) sur I si f est soit croissante (resp. strictement croissante), soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Remarque : Les fonctions croissantes sont donc les fonctions compatibles avec la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

IV. Fonctions et relation d'ordre
1. Fonctions monotones

Définition 17 (Fonctions monotones) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \leqslant f(y) \text{ (resp. } f(x) < f(y)\text{)}.$$

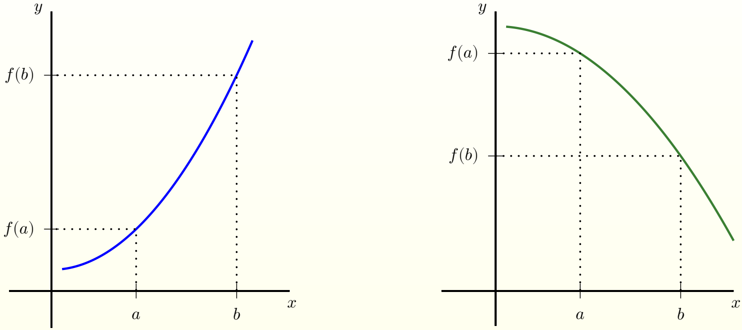
- La fonction f est décroissante (resp. strictement croissante) sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) \geqslant f(y) \text{ (resp. } f(x) > f(y)\text{)}.$$

- La fonction f est monotone sur I (resp. strictement monotone) sur I si f est soit croissante (resp. strictement croissante), soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Remarque : Les fonctions croissantes sont donc les fonctions compatibles avec la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

La définition (17) est générale et ne requiert pas la dérivabilité.



Fonction croissante sur I

$$a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

Fonction décroissante sur I

$$a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

Figure 12 – Une fonction croissante conserve les inégalités, une décroissante les renverse.

Exemples 15 :

1. La fonction cos est :

Exemples 15 :

1. La fonction cos est :
   - décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,

Exemples 15 :

1. La fonction cos est :
   - décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - croissante sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,

Exemples 15 :

1. La fonction cos est :
   - décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - croissante sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Exemples 15 :

1. La fonction cos est :
   - décroissante sur tout intervalle de la forme $\left[2k\pi\,;(2k+1)\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - croissante sur tout intervalle de la forme $\left[(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Exemples 15 :

1. La fonction cos est :
    - décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
    - croissante sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
    - mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 :

Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Exemples 15 :

1. La fonction cos est :
   - décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - croissante sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
   - mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 :

Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.
2. f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6 (Composée de fonctions monotones) :

La composée de fonctions monotones est monotone et la règle des signes donne le sens de la monotonie.

Proposition 6 (Composée de fonctions monotones) :

La composée de fonctions monotones est monotone et la règle des signes donne le sens de la monotonie.

Remarque : On ne peut en revanche rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones en général !

Proposition 6 (Composée de fonctions monotones) :

La composée de fonctions monotones est monotone et la règle des signes donne le sens de la monotonie.

Remarque : On ne peut en revanche rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones en général !

Par exemple $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ mais pas $x \longmapsto x^2 - x$.

Proposition 6 (Composée de fonctions monotones) :

La composée de fonctions monotones est monotone et la règle des signes donne le sens de la monotonie.

Remarque : On ne peut en revanche rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones en général !

Par exemple $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ mais pas $x \longmapsto x^2 - x$.

Exemple 16 :

Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction $x \longmapsto x + \ln x$, somme de fonctions strictement croissantes, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pas plus que pour la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$, composée de fonctions croissantes ou encore $x \longmapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$, produit de fonctions **positives** croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 :

Sans calcul de dérivée, étudier le sens de variation de :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Sans calcul de dérivée, étudier le sens de variation de :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \longmapsto \exp(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Sans calcul de dérivée, étudier le sens de variation de :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \longmapsto \exp(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)-1}$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 6 :

Sans calcul de dérivée, étudier le sens de variation de :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \longmapsto \exp(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)-1}$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$.
4. $x \longmapsto \sqrt{2-\tan^3 x}$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Définition 18 (Fonction bornées) :

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

Le réel M est alors appelé un majorant de f (sur I).

Définition 18 (Fonction bornées) :

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

  Le réel M est alors appelé un majorant de f (sur I).

- Une fonction f est dite minorée sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant m.$$

  Le réel m est alors appelé un minorant de f (sur I).

Définition 18 (Fonction bornées) :

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

  Le réel M est alors appelé un majorant de f (sur I).

- Une fonction f est dite minorée sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant m.$$

  Le réel m est alors appelé un minorant de f (sur I).

- Une fonction f est dite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 18 (Fonction bornées) :

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :
$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$
Le réel M est alors appelé un majorant de f (sur I).
- Une fonction f est dite minorée sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :
$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant m.$$
Le réel m est alors appelé un minorant de f (sur I).
- Une fonction f est dite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

ATTENTION

Les minorants et majorants ne sont pas forcément atteints même lorsqu'ils existent (*confer* l' exemple (17)).

Exercice 7 :

Soit $f : x \longmapsto -2x^2 + 3x - 1$. Montrer que f est majorée.

Exercice 7 :

Soit $f : x \longmapsto -2x^2 + 3x - 1$. Montrer que f est majorée.

Proposition 7 :

Une fonction f est bornée si, et seulement si $|f| : x \longmapsto |f(x)|$ est majorée.

Exemple 17 :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, y est bornée. Majorée par 1 (atteint) et minorée par 0 (non atteint).

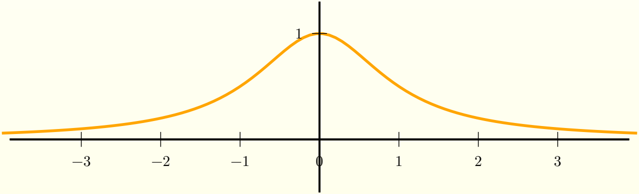


Figure 13 – Courbe représentative d'une fonction bornée.

Définition 19 (Extrema globaux et locaux) :

Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- La fonction f admet un maximum global (resp. minimum global) en x_0 si :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x \in \mathrm{I}} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathrm{I}} f(x)$).

Définition 19 (Extrema globaux et locaux) :

Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- La fonction f admet un maximum global (resp. minimum global) en x_0 si :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

  On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x)$).

- La fonction f admet un maximum local (resp. minimum local) en x_0 s'il existe un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ contenant x_0 tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{J},\ f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

  On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x\in \mathrm{J}} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min\limits_{x\in \mathrm{J}} f(x)$).

Il est clair que, dans le cadre de la définition,

$$\max_{x\in \mathrm{J}} f(x) \leqslant \max_{x\in \mathrm{I}} f(x) \quad \text{et} \quad \min_{x\in \mathrm{J}} f(x) \geqslant \min_{x\in \mathrm{I}} f(x).$$

Il est clair que, dans le cadre de la définition,

$$\max_{x\in \mathrm{J}} f(x) \leqslant \max_{x\in \mathrm{I}} f(x) \quad \text{et} \quad \min_{x\in \mathrm{J}} f(x) \geqslant \min_{x\in \mathrm{I}} f(x).$$

Remarque : Une fonction non bornée ne peut clairement pas avoir d'extrema globaux mais seulement des extrema locaux.

Il est clair que, dans le cadre de la définition,

$$\max_{x\in \mathrm{J}} f(x) \leqslant \max_{x\in \mathrm{I}} f(x) \quad \text{et} \quad \min_{x\in \mathrm{J}} f(x) \geqslant \min_{x\in \mathrm{I}} f(x).$$

Remarque : Une fonction non bornée ne peut clairement pas avoir d'extrema globaux mais seulement des extrema locaux.

Exemple 18 :

Reprenons la fonction de exemple (17) définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

- f admet un maximum global en $x_0 = 0$ qui est 1.
- f est minorée par 0 sans avoir de minimum global.

Exercice 8 :

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1.

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a$, $x \neq a$.
  Dans ce cas, on appelle cette limite nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \to a$, $x \neq a$.

  Dans ce cas, on appelle cette limite nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in \mathrm{A}$ au sens précédent.

  On appelle alors fonction dérivée de f sur A, que l'on note f' $\left(\text{ou } \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$, la fonction qui à tout x de A associe le nombre dérivé de f en x :

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) :

- On note $\mathcal{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) :

- On note $\mathcal{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- La tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est définie comme la droite d'équation

$$(\mathrm{T}_a) :\ y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

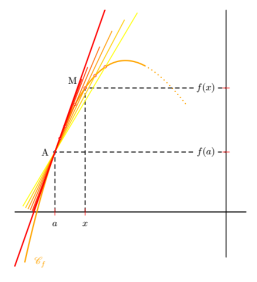


Figure 14 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

Remarques : La dérivation est une notion :

- locale et non ponctuelle : la fonction f doit être définie dans un voisinage de a et pas seulement en a.

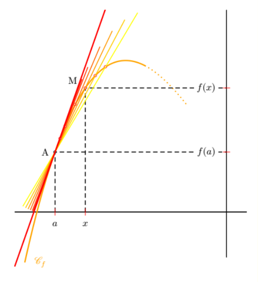


Figure 14 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

Remarques : La dérivation est une notion :

- locale et non ponctuelle : la fonction f doit être définie dans un voisinage de a et pas seulement en a.
- locale et non globale : elle ne dépend que de la restriction de f à un voisinage de a quel qu'il soit et non de sa description globale.

Proposition 8 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

- Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

Proposition 8 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

- Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et
$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$
- Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Proposition 8 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

- L'inverse d'une fonction dérivable en a et ne s'annulant pas en a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

Proposition 8 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

- L'inverse d'une fonction dérivable en a et ne s'annulant pas en a est une fonction dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$
- Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont le dénominateur ne s'annule pas en a est une fonction dérivable en a et
$$\left(\frac{f}{g}\right)(a)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Théorème 9 (Dérivée d'une composée) :

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$\left(f \circ u\right)'(x) = u'(x) \times f'\left(u(x)\right).$$

Rappel :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions du tableau.

Fonction f	Dérivée f'	Conditions sur u
$x \longmapsto u(ax+b)$	$au'(ax+b)$	$ax+b \in \mathrm{I}$.
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\forall\, x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$.
$u^n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$nu' \times u^{n-1}$	$\forall\, x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$ si $n < 0$.

Rappel :

e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$	
$\ln\|u\|$	$\dfrac{u'}{u}$	$\forall\, x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0.$
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\tan(u)$	$\dfrac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1+\tan^2(u))$	$\forall\, x \in \mathrm{I},$ $u(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}.$
$f(u)$	$u' \times f'(u)$	$u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}.$

Exercice 9 :

Étudier la dérivabilité et donné sa dérivée le cas échéant de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right).$$

Théorème 10 :

Soient I un **(seul)** intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Théorème 10 :

Soient I un **(seul)** intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Théorème 10 :

Soient I un **(seul)** intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- f est constante sur I si, et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Théorème 10 :

Soient I un **(seul)** intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- f est constante sur I si, et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Pour la stricte monotonie :

- f est strictement croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathrm{I}$ avec $a < b$.

Théorème 10 :

Soient I un **(seul)** intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- f est constante sur I si, et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Pour la stricte monotonie :

- f est strictement croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathrm{I}$ avec $a < b$.
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si f' est négative sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathrm{I}$ avec $a < b$.

Méthode 3 :

Les cas d'utilisation les plus courants sont :

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante sur I.

Méthode 3 :

Les cas d'utilisation les plus courants sont :

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement décroissante sur I.

Méthode 3 :

Les cas d'utilisation les plus courants sont :

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement décroissante sur I.

ATTENTION

f strictement croissante sur I n'implique pas que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Contre-exemple : la fonction cube $f : x \longmapsto x^3$.

ATTENTION Il est fondamental de raisonner sur un intervalle donné !

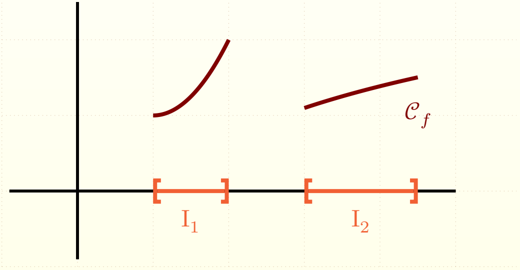


Figure 15 – f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geqslant 0$ mais n'est pas croissante sur $I = I_1 \cup I_2$.

VI. Continuité

VI. Continuité

1. Fonction continue

Définition 21 :

Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est continue a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

VI. Continuité

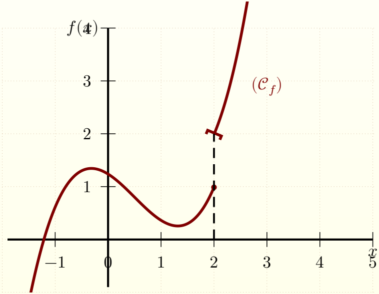
1. Fonction continue

Définition 21 :

Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est continue a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
  On note $\mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.

Graphiquement, la courbe d'une fonction continue peut se tracer sans lever le crayon.



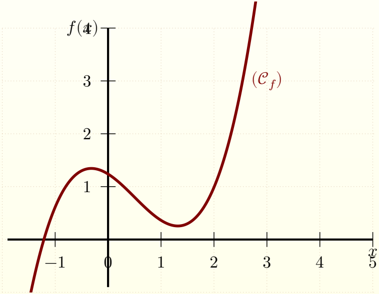


Figure 16 – Exemples de fonctions définies continues et discontinues en un point.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

1. $|f|$ est continue sur I.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

1. $|f|$ est continue sur I.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur I est continue sur I.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

1. $|f|$ est continue sur I.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur I est continue sur I.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur I est continue sur I.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

1. $|f|$ est continue sur I.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur I est continue sur I.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur I est continue sur I.
4. Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

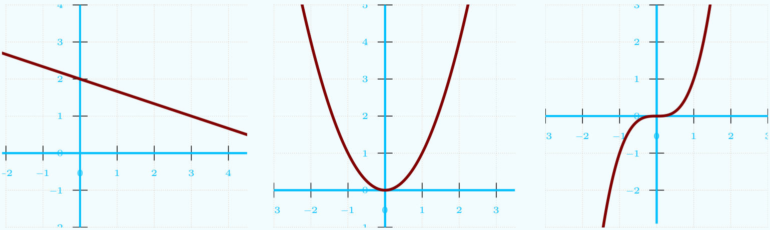
Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

1. $|f|$ est continue sur I.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur I est continue sur I.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur I est continue sur I.
4. Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
5. Si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemples 19 :

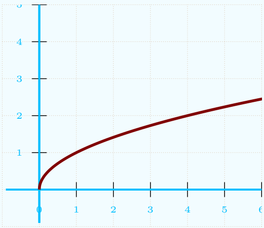
- les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme) sont continues sur leur ensemble de définition ;



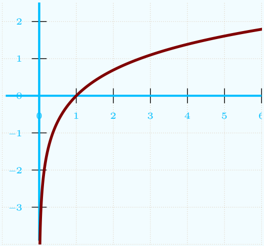
$x \longmapsto -\frac{1}{3}x + 2.$ $x \longmapsto x^2.$ $x \longmapsto x^3.$

Exemples 19 :

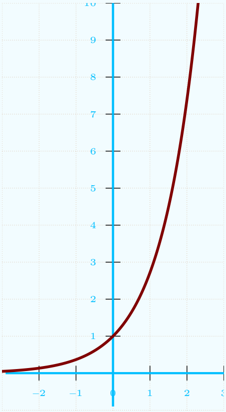
- les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme) sont continues sur leur ensemble de définition ;



$x \longmapsto \sqrt{x}$.



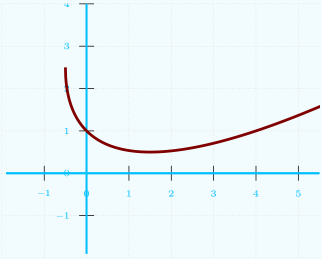
$x \longmapsto \ln x$



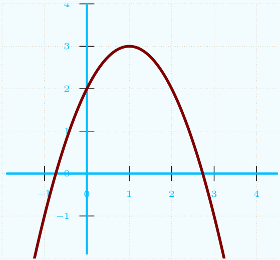
$x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$.

Exemples 19 :

- les fonctions construites à partir des fonctions de référence par combinaisons linéaires, produits ou composition sont continues sur leurs ensembles de définition ;



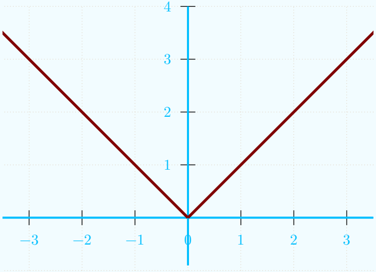
$x \longmapsto x - \sqrt{2x+1} + 3$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.



$x \longmapsto -(x+1)(x-3) - 1$.

Exemples 19 :

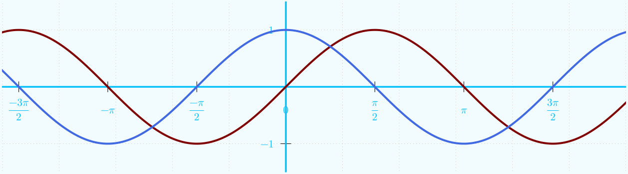
- la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.



$x \longmapsto |x|$.

Exemples 19 :

- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.



$$x \longmapsto \cos x \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \sin x.$$

Théorème 12 (Dérivabilité $\Longrightarrow$ continuité) :

- Toute fonction dérivable en un point a et continue en ce point.

Théorème 12 (Dérivabilité $\Longrightarrow$ continuité) :

- Toute fonction dérivable en un point a et continue en ce point.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Théorème 12 (Dérivabilité $\implies$ continuité) :

- Toute fonction dérivable en un point a et continue en ce point.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

ATTENTION

Les réciproques sont fausses !

Contre-exemples : valeur absolue, racine carrée en 0.

Théorème 13 (TVI) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Si f change de signe sur I alors elle s'y annule :

$$\text{Pour tous réels } a < b \text{ de I}, \quad f(a)f(b) \leqslant 0 \implies \exists\, c \in [a\,;b] \;/\; f(c) = 0.$$

Théorème 13 (TVI) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Si f change de signe sur I alors elle s'y annule :

$$\text{Pour tous réels } a < b \text{ de I}, \quad f(a)f(b) \leqslant 0 \implies \exists\, c \in [a\,;b] \ / \ f(c) = 0.$$

2. $f(\mathrm{I})$ est un intervalle : tout réel entre deux valeurs de f admet au moins un antécédent par f.

$$\forall\, f(a), f(b) \in f(\mathrm{I}),\ \underset{\text{ou } f(b)<k<f(a)}{f(a) < k < f(b)} \implies \exists\, c \in [a\,;b] \ / \ f(c) = k.$$

VI. Continuité

3. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 13 (TVI) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Si f change de signe sur I alors elle s'y annule :

$$\text{Pour tous réels } a < b \text{ de I,} \quad f(a)f(b) \leqslant 0 \implies \exists\, c \in [a\,;b] \;/\; f(c) = 0.$$

2. $f(\mathrm{I})$ est un intervalle : tout réel entre deux valeurs de f admet au moins un antécédent par f.

$$\forall\, f(a), f(b) \in f(\mathrm{I}),\; \underset{\text{ou } f(b)<k<f(a)}{f(a) < k < f(b)} \implies \exists\, c \in [a\,;b] \;/\; f(c) = k.$$

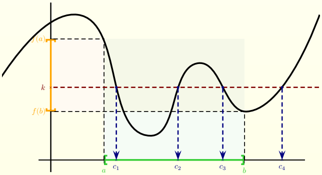


Figure 17 – Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.

Remarques :

- Ce théorème assure l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sans en donner la valeur.

Remarques :

- Ce théorème assure l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sans en donner la valeur.
- Ce théorème ne dit rien sur l'unicité d'une solution.

Remarques :

- Ce théorème assure l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sans en donner la valeur.
- Ce théorème ne dit rien sur l'unicité d'une solution.

Théorème 14 (TVI strictement monotone) :

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels de I.

Si f continue et strictement monotone, alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f qui est dans $[a\,;b]$:

$$\exists\,!\, x \in [a\,;b] \;/\; y = f(x).$$

Remarques :

- Ce théorème assure l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sans en donner la valeur.
- Ce théorème ne dit rien sur l'unicité d'une solution.

Théorème 14 (TVI strictement monotone) :

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels de I.

Si f continue et strictement monotone, alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f qui est dans $[a\,;b]$:

$$\exists\,!\,x \in [a\,;b] \;/\; y = f(x).$$

Exercice 10 :

Montrer que $0,8$ admet un unique antécédent par la fonction cos dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Théorème 15 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

Théorème 15 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux injections est une injection.

Théorème 15 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux injections est une injection.

ATTENTION

Dans la deuxième assertion du théorème (15), la fonction g n'est en rien obligée d'être injective !

Théorème 15 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux injections est une injection.

ATTENTION

Dans la deuxième assertion du théorème (15), la fonction g n'est en rien obligée d'être injective !

Exercice 11 :

Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et g n'est pas injective.

Théorème 15 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux injections est une injection.

ATTENTION

Dans la deuxième assertion du théorème (15), la fonction g n'est en rien obligée d'être injective !

Exercice 11 :

Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et g n'est pas injective.

Correction :

Considérer $x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}$.

Théorème 16 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Théorème 16 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Théorème 16 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux surjections est une surjection.

On fera la même remarque sur la surjectivité de f dans la seconde assertion du théorème (16) que dans celle du théorème (15).

Théorème 16 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux surjections est une surjection.

On fera la même remarque sur la surjectivité de f dans la seconde assertion du théorème (16) que dans celle du théorème (15).

Exercice 12 :

Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et f n'est pas surjective.

Théorème 16 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux surjections est une surjection.

On fera la même remarque sur la surjectivité de f dans la seconde assertion du théorème (16) que dans celle du théorème (15).

Exercice 12 :

Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et f n'est pas surjective.

Correction :

Considérer $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 22 :

Soient E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

On dit que f est une bijection (ou application bijective) lorsque tout élément de F a un unique antécédent par f :

$$\forall\, y \in \mathrm{F},\ \exists\, !x \in \mathrm{E} \,/\, y = f(x).$$

Définition 22 :

Soient E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

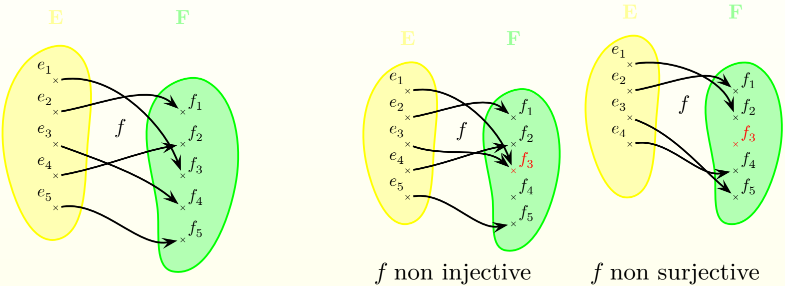
On dit que f est une bijection (ou application bijective) lorsque tout élément de F a un unique antécédent par f :

$$\forall\, y \in \mathrm{F},\ \exists\,!x \in \mathrm{E} \,/\, y = f(x).$$

Dire que tout élément de F a un unique antécédent revient à dire que tout élément de F a au moins un antécédent et au plus un antécédent.

Par conséquent dire que f est bijective revient à dire que f est surjective et injective.

$$\boxed{f \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective et surjective.}}$$



f bijective

f non bijective

Figure 18 – Diagramme sagittal d'une fonction bijective.

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.
- $f : [0\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.
- $f : [0\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \longmapsto]0\,;+\infty[$ et $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ sont des bijections.

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.
- $f : [0\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \longmapsto]0\,;+\infty[$ et $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ sont des bijections.
- $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas une bijection.

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.
- $f : [0\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \longmapsto]0\,;+\infty[$ et $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ sont des bijections.
- $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas une bijection.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective, alors f induit une bijection de E vers imf qui est $\tilde{f} : \mathrm{E} \longmapsto imf$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$.
  Cela s'applique en particulier aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle I.

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.
- $f : [0\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \longmapsto]0\,;+\infty[$ et $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ sont des bijections.
- $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas une bijection.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective, alors f induit une bijection de E vers imf qui est $\tilde{f} : \mathrm{E} \longmapsto imf$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$.
  Cela s'applique en particulier aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle I.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones affirme que toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur son image $f(\mathrm{I})$:

$$\forall\, y \in f(\mathrm{I}),\ \exists! x \in \mathrm{I} \,/\, y = f(x).$$

Exemples 20 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection.
- $f : [0\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \longmapsto]0\,;+\infty[$ et $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ sont des bijections.
- $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas une bijection.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective, alors f induit une bijection de E vers imf qui est $\tilde{f} : \mathrm{E} \longmapsto imf$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$.
  Cela s'applique en particulier aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle I.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones affirme que toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur son image $f(\mathrm{I})$:

$$\forall\, y \in f(\mathrm{I}),\ \exists! x \in \mathrm{I} \,/\, y = f(x).$$

Il dit, en fait, un peu plus que ça…

Théorème 17 (Théorème de la bijection) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$:

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & f(\mathrm{I}) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{est bijective.}$$

Théorème 17 (Théorème de la bijection) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & \mathrm{I} & \longrightarrow & f(\mathrm{I}) \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{est bijective.}$$

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle d'un des types suivants :

	I	$[a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b]$	$]a\,;b[$
$f(\mathrm{I})$	f croissante	$[f(a)\,;f(b)]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$
	f décroissante	$[f(b)\,;f(a)]$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;f(a)\right]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$

ATTENTION Il existe des bijections non continues.

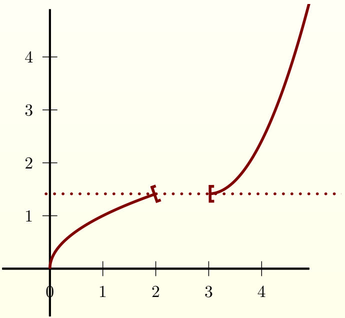


Figure 19 – Fonction bijective sur son ensemble de définition, non continue.

Remarques :

- Ne pas confondre f et $\tilde{f}$ ($\tilde{f}$ étant la corestriction de f à son ensemble image). Ces deux fonctions sont définies sur I mais ne possèdent pas nécessairement le même ensemble d'arrivée. $\tilde{f}$ est bijective alors que f ne l'est pas forcément (sauf si $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$).

Remarques :

- Ne pas confondre f et $\tilde{f}$ ($\tilde{f}$ étant la corestriction de f à son ensemble image). Ces deux fonctions sont définies sur I mais ne possèdent pas nécessairement le même ensemble d'arrivée. $\tilde{f}$ est bijective alors que f ne l'est pas forcément (sauf si $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$).
- Bien comprendre la nuance : dire que la fonction f établit une bijection de I sur son ensemble image $f(\mathrm{I})$ ne signifie pas que f est bijective mais que $\tilde{f}$, la corestriction de f à son ensemble image, l'est.

Remarques :

- Ne pas confondre f et $\tilde{f}$ ($\tilde{f}$ étant la corestriction de f à son ensemble image). Ces deux fonctions sont définies sur I mais ne possèdent pas nécessairement le même ensemble d'arrivée. $\tilde{f}$ est bijective alors que f ne l'est pas forcément (sauf si $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$).
- Bien comprendre la nuance : dire que la fonction f établit une bijection de I sur son ensemble image $f(\mathrm{I})$ ne signifie pas que f est bijective mais que $\tilde{f}$, la corestriction de f à son ensemble image, l'est.

Exemples 21 :

- exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques :

- Ne pas confondre f et $\tilde{f}$ ($\tilde{f}$ étant la corestriction de f à son ensemble image). Ces deux fonctions sont définies sur I mais ne possèdent pas nécessairement le même ensemble d'arrivée. $\tilde{f}$ est bijective alors que f ne l'est pas forcément (sauf si $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$).
- Bien comprendre la nuance : dire que la fonction f établit une bijection de I sur son ensemble image $f(\mathrm{I})$ ne signifie pas que f est bijective mais que $\tilde{f}$, la corestriction de f à son ensemble image, l'est.

Exemples 21 :

- exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- sin induit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$.

VIII. Réciproque

Définition 23 :

Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est une bijection, alors on peut considérer l'application qui va de F vers E et qui à tout élément x de F associe son unique antécédent par f, cette application est appelée bijection réciproque de f, on la note f^{-1} :

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & y \text{ défini par } f(y) = x. \end{array}$$

Définition 23 :

Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est une bijection, alors on peut considérer l'application qui va de F vers E et qui à tout élément x de F associe son unique antécédent par f, cette application est appelée bijection réciproque de f, on la note f^{-1} :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & x & \longmapsto & y \text{ défini par } f(y) = x. \end{array}$$

ATTENTION La notation f^{-1} n'a de sens que lorsque f est bijective.

Exemples 22 :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection et la bijection réciproque est $id_{\mathrm{E}}^{-1} = id_{\mathrm{E}}$.

Exemples 22 :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_{E} est une bijection et la bijection réciproque est $id_{\mathrm{E}}^{-1} = id_{\mathrm{E}}$.
- exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$ dont la bijection réciproque est la fonction logarithme népérien.

Exemple 23 (Fondamental) :

La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.

Cependant, considérons sa restriction f sur $\mathbb{R}_+$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de la bijection affirme alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son image $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

Elle admet donc une bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ qui est la fonction racine carrée :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{y} \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

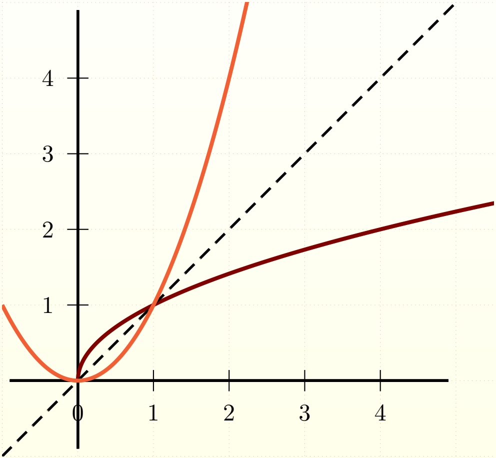


Figure 20 – $x \longmapsto x^2$ et sa réciproque $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 18 :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une bijection.

- On a $f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{E}}$ et $f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{F}}$.
  De plus f^{-1} est une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 18 :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une bijection.

- On a $f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{E}}$ et $f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{F}}$.
  De plus f^{-1} est une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Si $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ est une autre bijection, alors la composée $g \circ f$ est une bijection de E vers G, et sa bijection réciproque est :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Théorème 18 :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une bijection.

- On a $f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{E}}$ et $f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{F}}$.
  De plus f^{-1} est une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Si $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ est une autre bijection, alors la composée $g \circ f$ est une bijection de E vers G, et sa bijection réciproque est :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

ATTENTION

aux ensembles de départ et d'arrivée dans la première assertion du théorème.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x \quad \text{MAIS} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x.$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
- La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
- La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

- On dit que f est idem-potente si $f \circ f = f$.

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
- La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

- On dit que f est idem-potente si $f \circ f = f$.

Exemples 25 :

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
- La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

- On dit que f est idem-potente si $f \circ f = f$.

Exemples 25 :

- Dans le plan, toute projection est idem-potente.

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$.

- On dit que f est une involution si $f \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
  Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 24 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
- La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

- On dit que f est idem-potente si $f \circ f = f$.

Exemples 25 :

- Dans le plan, toute projection est idem-potente.
- L'identité, la valeur absolue (le module dans $\mathbb{C}$) ou la partie entière, vérifient cette propriété.

Exercice 13 :

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x-y)\,. \end{array}$$

Exercice 13 :

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x-y)\,. \end{array}$$

2. $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;xy)\,. \end{array}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour montrer que f est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 4 :

On montre que f est continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.

Cette méthode est simple à appliquer car il suffit de justifier que f est continue sur I et d'étudier ses variations pour montrer qu'elle est bijective.

Par contre, cette méthode ne donne pas l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour montrer que f est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 4 :

On montre que f est continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.

Cette méthode est simple à appliquer car il suffit de justifier que f est continue sur I et d'étudier ses variations pour montrer qu'elle est bijective.

Par contre, cette méthode ne donne pas l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 14 :

Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $[-1\,;0]$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour montrer que f est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 5 :

Pour tout $y \in F$, on montre que l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) possède une unique solution qui est, par définition, $x = f^{-1}(y)$.

Cette méthode, en général plus compliquée que la précédente, permet néanmoins d'obtenir l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour montrer que f est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 5 :

Pour tout $y \in \mathrm{F}$, on montre que l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) possède une unique solution qui est, par définition, $x = f^{-1}(y)$.

Cette méthode, en général plus compliquée que la précédente, permet néanmoins d'obtenir l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 15 :

Montrer que la fonction $g :]-1\,;+\infty[\longmapsto]-\infty\,;1[$ définie par $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Proposition 19 :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une bijection de I sur J.

Les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

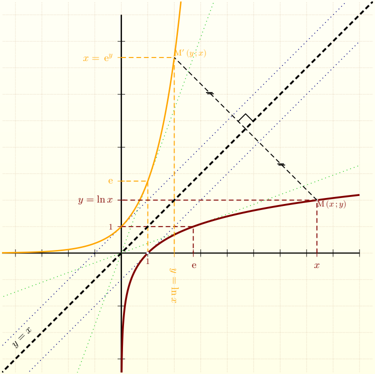


Figure 21 – Les courbes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exercice 16 :

Tracer l'allure de la courbe représentative de $\arccos = (\cos)^{-1}$ à partir du graphe de $\cos$ sur $[0\,;\pi]$.

Théorème 20 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

1. **Variations :** Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} l'est aussi et de même monotonie.

Théorème 20 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

1. **Variations :** Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} l'est aussi et de même monotonie.
2. **Continuité :** Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J.

Théorème 20 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

1. **Variations :** Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} l'est aussi et de même monotonie.
2. **Continuité :** Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J.
3. **Dérivabilité :** Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall\, b \in \mathrm{J},\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$

Exemple 26 :

La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone.

La fonction exp est donc bijective et sa réciproque $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{x}.$$

Remarque : Si f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ et $f'(a) = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ où $b = f(a)$.
Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $\mathrm{M}\,(b\,;a)$.
En particulier f^{-1} n'est pas dérivable en b.

Remarque : Si f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ et $f'(a) = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ où $b = f(a)$.
Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $\mathrm{M}\,(b\,;a)$.
En particulier f^{-1} n'est pas dérivable en b.

Exemple 27 :

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective de réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2x$ ne s'annulant que pour $x = 0$.

Ainsi, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(y)\Big)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

On retrouve que la réciproque de la fonction carrée n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale à l'origine.

Exercice 17 :

Soit $\varphi : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.

Exercice 17 :

Soit $\varphi : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J.

Exercice 17 :

Soit $\varphi : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J.
3. Déterminer $\left(\varphi^{-1}\right)'(1)$.