Applications

I/ Sémantique

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?) : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

1. Si f est croissante et $f(a) < f(b)$, alors $a < b$.
2. Si f est croissante et $f(a) \leqslant f(b)$, alors $a \leqslant b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a) \leqslant f(b)$, alors $a \leqslant b$.
4. $[\forall u, v \in \mathbb{R}, (u < v \implies f(u) \leqslant f(v))] \iff [\forall u, v \in \mathbb{R}, (u \leqslant v \implies f(u) \leqslant f(v))]$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Montrer que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$, avec $x < y < z$ tels que :

$$\Big\{f(x) < f(y) \text{ et } f(y) > f(z)\Big\} \text{ ou } \Big\{f(x) > f(y) \text{ et } f(y) < f(z)\Big\}.$$

Exercice 3 : Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est majorée par M.
2. f est minorée.
3. f est bornée sur I.
4. f n'admet pas de minimum global.
5. f n'admet pas de minimum local.

Exercice 4 : Déterminer si les parties suivantes sont majorées, minorées, bornées, en donnant le cas échéant un exemple de majorant, de minorant, le maximum et le minimum.

1. $\mathbb{R}_+$
2. $\mathbb{Z}$
3. $[0\,;1]$
4. $]0\,;1]$
5. $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

II/ Fonctions

Exercice 5 : Déduire des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto (2x+3)^2 - 2$.
2. $g : x \longmapsto 1 - \dfrac{2}{x-3}$.
3. $h : x \longmapsto 2e^{\frac{x}{2}}$.
4. $j : x \longmapsto 2|x+2| - 1$.

Applications

Exercice 6 :

1. Soient les fonctions définies par $f(x)=(1-x)^2$, $g(x)=\cos(x)$ et $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

   Déterminer les fonctions $g\circ f$, $f\circ g$, $h\circ h$, $f\circ g\circ h$, $h\circ g\circ f$ et $g\circ h\circ f$ ainsi que leur domaine de définition respectif.
2. Même question avec $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln(x)$ et $h(x)=|x|$.

Exercice 7 : Déterminer deux applications f et g telles que $f\circ g=g\circ f$.

Exercice 8 : Déterminer le domaine de définition des fonctions f_i suivantes définies par :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{x+3} \\
f_2(x) &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
f_3(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\
f_4(x) &= \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \\
f_5(x) &= \sqrt{\frac{16x^2-2x+8}{x^2+5x+6}} \\
f_6(x) &= \sqrt{\frac{2-5x}{x^2-6x+5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7(x) &= \ln(2x+3). \\
f_8(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right). \\
f_9(x) &= \ln(\cos(x)). \\
f_{10}(x) &= \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) \\
f_{11}(x) &= \ln(x-2)-\ln(x-1) \\
f_{12}(x) &= \ln(x-2)-\ln(1-x) \\
f_{13}(x) &= \ln(\ln(x)) \\
f_{14}(x) &= \sqrt{\ln(x+3)} \\
f_{15}(x) &= \frac{1}{\cos(2x)}.
\end{aligned}$$

Exercice 9 : Étudier la parité des fonctions suivantes définies par :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(3x^2-1). \\
g(x) &= 2x^6-5x^4+x^2+6 \\
h(x) &= \mathrm{e}^{|x|}. \\
i(x) &= \ln(x^2+1). \\
j(x) &= \frac{1}{(x^3-2x)^3}\times\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{\cos(x)}{x^2-1}. \\
l(x) &= x\sin(x)+1. \\
m(x) &= \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} \\
n(x) &= \frac{e^x-1}{e^x+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
o(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \\
p(x) &= \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right). \\
q(x) &= x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 10 :

1. Montrer que si f est dérivable et paire, alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est dérivable et impaire, alors f' est paire.
3. Montrer que si f est dérivable et T-périodique, alors f' est T-périodique.

Exercice 11 : Soit $f : x\longmapsto \ln\left|x^2-4x+3\right|$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$, $f(2-x)=f(2+x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 12 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ f(1+x)+f(1-x)=-6$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 13 : (Hors-Programme)

1. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x}+\sqrt{8-x}$. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet un axe de symétrie.
2. Soit $g : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$. Montrer que $\mathcal{C}_h$ admet un centre de symétrie.

Exercice 14 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$.

1. Montrer que $\mathrm{I}(-1,0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. (Hors-Programme)
2. Étudier les variations de f.
3. Discuter graphiquement l'équation $f(x)=m$ pour $m\in\mathbb{R}$.
4. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 15 : Donner la dérivée des fonctions définies par leur expression suivante :

(Il s'agit d'un exercice d'entraînement technique à la différentiation donc ne se préoccupera ici et exceptionnellement pas du domaine de dérivabilité)

Commentaires : *Pour toutes vos recherches de dérivées, je vous conseille vivement de vérifier vos calculs avec des applis telles que* dcode.

$f_1(x) = (x-4)^2$.

$f_2(x) = \dfrac{1}{(5x-3)^3}$.

$f_3(x) = \cos\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)$.

$f_4(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

$f_5(x) = \tan(3x)$.

$f_6(x) = \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{1+\cos(x)}$.

$f_7(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

$f_8(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

$f_9(x) = \ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$.

$f_{10}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

$f_{11}(x) = \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$f_{12}(x) = \sqrt{x^2-x-2}$.

$f_{13}(x) = (x^2+2x-9)^3$.

$f_{14}(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$.

$f_{15}(x) = \left(4x^3+2x-1\right)^4$.

$f_{16}(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$f_{17}(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3$.

$f_{18}(x) = \sqrt{\cos(x)}$.

$f_{19}(x) = \cos((x^2-5)^3)$.

$f_{20}(x) = \cos\left(\sqrt{2+\sin(x)}\right)$.

$f_{21}(x) = \dfrac{5}{3\,(x-2)^4}$.

$f_{22}(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$.

$f_{23}(x) = \left(1-5x^2\right)^3$.

$f_{24}(x) = \sin^2(x)$.

$f_{25}(x) = \sin(x^2)$.

$f_{26}(x) = \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$f_{27}(x) = \mathrm{e}^{4x+1}$.

$f_{28}(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x)$.

$f_{29}(x) = \mathrm{e}^{-x}+x^{-1}$.

$f_{30}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$.

$f_{31}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x^2+5x-3}}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

$f_{32}(x) = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$.

$f_{33}(x) = \mathrm{e}^{5x^3+7x+4}$.

$f_{34}(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

$f_{35}(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$.

$$f_{36}(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$
$$f_{37}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x+2}.$$
$$f_{38}(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{x} - 3\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}.$$
$$f_{39}(x) = (x^2-4)\,\mathrm{e}^{x-2}.$$
$$f_{40}(x) = \mathrm{e}^{\frac{4}{2x-1}}.$$
$$f_{41}(x) = \frac{2\cos(x)+3}{2\cos(x)-3}.$$
$$f_{42}(x) = \sin(x)\,(1+\cos(x)).$$
$$f_{43}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$
$$f_{44}(x) = \frac{\cos(\pi x - 1)}{\cos(x-\pi)}.$$
$$f_{45}(x) = (3x^2-2)\sin^2(x).$$
$$f_{46}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$
$$f_{47}(x) = \cos\left(\frac{x}{x+1}\right).$$
$$f_{48}(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin(4x)}.$$
$$f_{49}(x) = \ln(\ln(x)).$$
$$f_{50}(x) = \frac{1}{x\ln(x)}.$$
$$f_{51}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$f_{52}(x) = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4.$$
$$f_{53}(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$
$$f_{54}(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 16 : Étudier le domaine de dérivabilité des fonctions définies par leur expression suivante :

$$f_1(x) = \cos^6(x)$$
$$f_2(x) = \ln(\ln(x))$$
$$f_3(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}.$$
$$f_4(x) = \sqrt{(x^2-1)^3}.$$
$$f_5(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}.$$
$$f_6(x) = x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$
$$f_7(x) = \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right).$$
$$f_8(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}.$$

Exercice 17 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : \quad x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.

III/ Bijection et réciproque

Exercice 18 : Déterminer une fonction réelle bijective qui ne vérifie pas toutes les conditions du théorème de la bijection.

Exercice 19 : Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}$.

Montrer que f réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ dans un intervalle à préciser, et expliciter sa réciproque f^{-1}.

Exercice 20 : Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(-\dfrac{1}{\ln(x)}\right). \end{array}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.

2. Expliciter la réciproque de f. Peut-on en conclure que $f^{-1} = f$?

Exercice 21 : En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f : \begin{array}{rcl}]1;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$
2. $f : \begin{array}{rcl}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2-1} \end{array}$
3. $f : \begin{array}{rcl} [1;+\infty[& \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{\ln(x)} \end{array}$
4. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$
5. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$
6. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} \end{array}$

Exercice 22 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 9x}{2\left(x^2-1\right)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,;1[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{35}{12}\right) = \dfrac{1}{2}$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{35}{12}\right)$.

Exercice 23 : Définir la fonction arcsin, réciproque de sin sur des intervalles à préciser et donner l'expression de sa dérivée sur cet ensemble.

IV/ Propriétés algébriques

Exercice 24 (À retenir) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ deux applications telles que :

$$f \circ g = id_{\mathrm{F}} \quad \text{et} \quad g \circ f = id_{\mathrm{E}}.$$

Montrer que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 25 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications et A une partie de E.

Montrer que $(g \circ f)(\mathrm{A}) = g(f(\mathrm{A}))$.

Exercice 26 :

1. Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications et B une partie de G.

Montrer que $(g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B}))$.

2. Montrer que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective si, et seulement si pour tout partie A de E on a :

$$f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}.$$

Exercice 27 : Soient E, F et G des ensembles, $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$, $g \in \mathscr{F}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ et on définit l'application $h \in \mathscr{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\times\mathrm{G})$ par :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ h(x) = (f(x)\,;g(x))\,.$$

1. Démontrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi.
2. Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 28 : Soient E un ensemble et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{E})$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si, et seulement si f est surjective.

Exercice 29 : Soit E un ensemble non vide et f une application de E vers $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

En considérant la partie $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut pas être surjective.