Applications

I/ Sémantique

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?) : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

1. Si f est croissante et $f(a) < f(b)$, alors $a < b$.
2. Si f est croissante et $f(a) \leqslant f(b)$, alors $a \leqslant b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a) \leqslant f(b)$, alors $a \leqslant b$.
4. $[\forall u, v \in \mathbb{R}, (u < v \implies f(u) \leqslant f(v))] \iff [\forall u, v \in \mathbb{R}, (u \leqslant v \implies f(u) \leqslant f(v))]$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Montrer que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$, avec $x < y < z$ tels que :

$$\Big\{f(x) < f(y) \text{ et } f(y) > f(z)\Big\} \text{ ou } \Big\{f(x) > f(y) \text{ et } f(y) < f(z)\Big\}.$$

Correction : Il est déjà clair que s'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$ et que l'une des conditions $f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z)$, ou $f(x) > f(y)$ et $f(y) < f(z)$ est satisfaite, la fonction ne peut être ni croissante, ni décroissante donc encore moins monotone.

Montrons alors la contraposée de la réciproque en supposant f monotone. Sans perte de généralité, on peut supposer, par exemple, que f est croissante.

Considérons trois réels x, y, z quelconques tels que $x < y < z$ alors $f(x) < f(y) < f(z)$ *i.e.* aucune des deux conditions $\Big(f(x) < f(y) \text{ et } f(y) > f(z)\Big)$ et $\Big(f(x) > f(y) \text{ et } f(y) < f(z)\Big)$ ne peut être satisfaite et le résultat est ainsi montré.

Exercice 3 : Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est majorée par M.
2. f est minorée.
3. f est bornée sur I.
4. f n'admet pas de minimum global.
5. f n'admet pas de minimum local.

Exercice 4 : Déterminer si les parties suivantes sont majorées, minorées, bornées, en donnant le cas échéant un exemple de majorant, de minorant, le maximum et le minimum.

1. $\mathbb{R}_+$
2. $\mathbb{Z}$
3. $[0\,;1]$
4. $]0\,;1]$
5. $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Applications

II/ Fonctions

Exercice 5 : Déduire des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto (2x+3)^2 - 2$.
2. $g : x \longmapsto 1 - \dfrac{2}{x-3}$.
3. $h : x \longmapsto 2e^{\frac{x}{2}}$.
4. $j : x \longmapsto 2|x+2| - 1$.

Exercice 6 :

1. Soient les fonctions définies par $f(x) = (1-x)^2$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Déterminer les fonctions $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ h$, $f \circ g \circ h$, $h \circ g \circ f$ et $g \circ h \circ f$ ainsi que leur domaine de définition respectif.
2. Même question avec $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = |x|$.

Exercice 7 : Déterminer deux applications f et g telles que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 8 : Déterminer le domaine de définition des fonctions f_i suivantes définies par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}$$
$$f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$$
$$f_4(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$$
$$f_5(x) = \sqrt{\frac{16x^2-2x+8}{x^2+5x+6}}$$
$$f_6(x) = \sqrt{\frac{2-5x}{x^2-6x+5}}$$
$$f_7(x) = \ln(2x+3).$$
$$f_8(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$
$$f_9(x) = \ln(\cos(x)).$$
$$f_{10}(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$
$$f_{11}(x) = \ln(x-2) - \ln(x-1)$$
$$f_{12}(x) = \ln(x-2) - \ln(1-x)$$
$$f_{13}(x) = \ln(\ln(x))$$
$$f_{14}(x) = \sqrt{\ln(x+3)}$$
$$f_{15}(x) = \frac{1}{\cos(2x)}.$$

Exercice 9 : Étudier la parité des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = x(3x^2-1).$$
$$g(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$$
$$h(x) = e^{|x|}.$$
$$i(x) = \ln(x^2+1).$$
$$j(x) = \frac{1}{(x^3-2x)^3} \times \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}.$$
$$k(x) = \frac{\cos(x)}{x^2-1}.$$
$$l(x) = x\sin(x) + 1.$$
$$m(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$n(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}.$$
$$o(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
$$p(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right).$$
$$q(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right).$$

Exercice 10 :

1. Montrer que si f est dérivable et paire, alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est dérivable et impaire, alors f' est paire.
3. Montrer que si f est dérivable et T-périodique, alors f' est T-périodique.

Exercice 11 : Soit $f : x \longmapsto \ln\left|x^2 - 4x + 3\right|$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $f(2-x) = f(2+x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction : La droite (Δ) d'équation $x = 2$ est la médiatrice du segment $[\mathrm{MN}]$ où M, d'abscisse $a + x$ et N, d'abscisse $a - x$ sont des points de $\mathscr{C}_f$ *i.e.* l'axe de symétrie de la courbe.

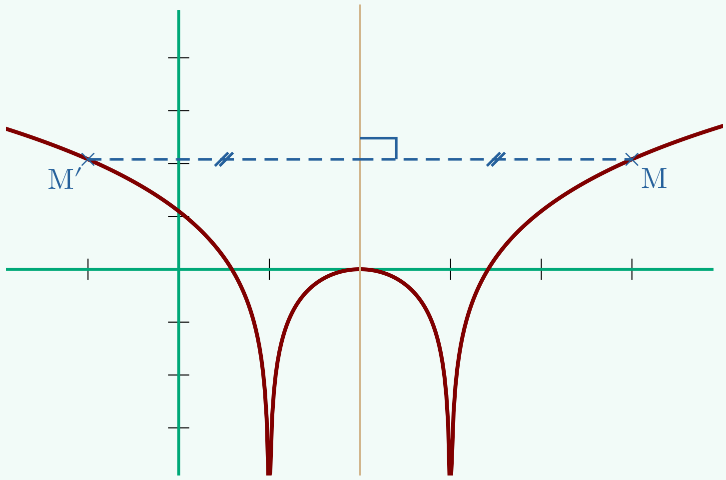

Figure III.1 – (Δ) : $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe de $x \longmapsto \ln\left|x^2 - 4x + 3\right|$.

Exercice 12 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(1 + x) + f(1 - x) = -6$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction : Le point $\mathrm{A}\,(1\,; -3)$ est donc le milieu du segment $[\mathrm{MN}]$ où M, d'abscisse $1+x$ et N, d'abscisse $1 - x$ sont des points de $\mathscr{C}_f$ *i.e.* le centre de symétrie de la courbe.

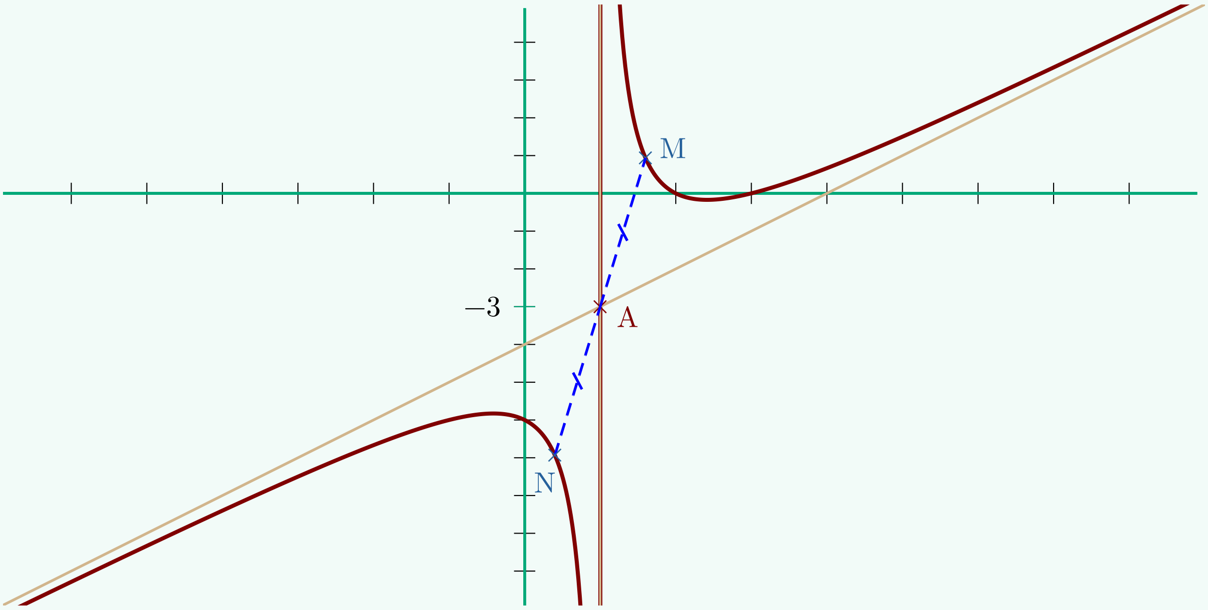

Figure III.2 – A $(1\,;-3)$ est centre de symétrie de la courbe de $x \longmapsto \dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$.

Méthode 1 (Axe et centre de symétrie) :

(Hors-Programme)

Soient a, b deux réels et f une fonction définie sur un domaine symétrique par rapport à a.

Pour montrer que la courbe de f admet :

— la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie, on montre que :

$$f(a-x) - f(a+x) = 0.$$

— le point $\Omega\,(a\,;b)$ comme centre de symétrie, on montre que :

$$f(a-x) + f(a+x) = 2b.$$

Exercice 13 : (Hors-Programme)

1. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet un axe de symétrie.
2. Soit $g : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$. Montrer que $\mathcal{C}_h$ admet un centre de symétrie.

Exercice 14 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$.

1. Montrer que $\mathrm{I}(-1,0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. (Hors-Programme)
2. Étudier les variations de f.
3. Discuter graphiquement l'équation $f(x) = m$ pour $m \in \mathbb{R}$.
4. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 15 : Donner la dérivée des fonctions définies par leur expression suivante :

(Il s'agit d'un exercice d'entraînement technique à la différentiation donc ne se préoccupera ici et exceptionnellement pas du domaine de dérivabilité)

Commentaires : *Pour toutes vos recherches de dérivées, je vous conseille vivement de vérifier vos calculs avec des applis telles que* dcode.

$f_1(x) = (x-4)^2.$

$f_2(x) = \dfrac{1}{(5x-3)^3}.$

$f_3(x) = \cos\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right).$

$f_4(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}.$

$f_5(x) = \tan(3x).$

$f_6(x) = \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{1+\cos(x)}.$

$f_7(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$

$f_8(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}.$

$f_9(x) = \ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right).$

$f_{10}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}.$

$f_{11}(x) = \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right).$

$f_{12}(x) = \sqrt{x^2-x-2}.$

$f_{13}(x) = (x^2+2x-9)^3.$

$f_{14}(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3.$

$f_{15}(x) = (4x^3+2x-1)^4.$

$f_{16}(x) = \sqrt{1-x^2}.$

$f_{17}(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3.$

$f_{18}(x) = \sqrt{\cos(x)}.$

$f_{19}(x) = \cos((x^2-5)^3).$

$f_{20}(x) = \cos\left(\sqrt{2+\sin(x)}\right).$

$f_{21}(x) = \dfrac{5}{3\,(x-2)^4}.$

$f_{22}(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}.$

$f_{23}(x) = (1-5x^2)^3.$

$f_{24}(x) = \sin^2(x).$

$f_{25}(x) = \sin(x^2).$

$f_{26}(x) = \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right).$

$f_{27}(x) = \mathrm{e}^{4x+1}.$

$f_{28}(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x).$

$f_{29}(x) = \mathrm{e}^{-x}+x^{-1}.$

$f_{30}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}.$

$f_{31}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x^2+5x-3}}{\mathrm{e}^{x}+1}.$

$f_{32}(x) = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.$

$f_{33}(x) = \mathrm{e}^{5x^3+7x+4}.$

$f_{34}(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$

$f_{35}(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}.$

$f_{36}(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$

$f_{37}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x+2}.$

$f_{38}(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x}-3\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}.$

$f_{39}(x) = (x^2-4)\,\mathrm{e}^{x-2}.$

$f_{40}(x) = \mathrm{e}^{\frac{4}{2x-1}}.$

$f_{41}(x) = \dfrac{2\cos(x)+3}{2\cos(x)-3}.$

$f_{42}(x) = \sin(x)\,(1+\cos(x)).$

$f_{43}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}.$

$f_{44}(x) = \dfrac{\cos(\pi x-1)}{\cos(x-\pi)}.$

$f_{45}(x) = (3x^2-2)\sin^2(x).$

$f_{46}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}.$

$f_{47}(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x+1}\right).$

$f_{48}(x) = \dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)}.$

$f_{49}(x) = \ln(\ln(x)).$

$f_{50}(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}.$

$f_{51}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

$f_{52}(x) = \dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4.$

$f_{53}(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

$f_{54}(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$

Exercice 16 : Étudier le domaine de dérivabilité des fonctions définies par leur expression suivante :

$f_1(x) = \cos^6(x)$

$f_2(x) = \ln(\ln(x))$

$f_3(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}.$

$f_4(x) = \sqrt{(x^2-1)^3}.$

$f_5(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}.$

$f_6(x) = x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

$f_7(x) = \sin\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right).$

$f_8(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}.$

Exercice 17 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : \quad x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.

III/ Bijection et réciproque

Exercice 18 : Déterminer une fonction réelle bijective qui ne vérifie pas toutes les conditions du théorème de la bijection.

Exercice 19 : Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}$.

Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ dans un intervalle à préciser, et expliciter sa réciproque f^{-1}.

Exercice 20 : Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(-\dfrac{1}{\ln(x)}\right) \end{array}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f. Peut-on en conclure que $f^{-1}=f$?

Exercice 21 : En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2-1} \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{\ln(x)} \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-x \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}$
6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} \end{array}$

Exercice 22 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-9x}{2\,(x^2-1)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,;1[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{35}{12}\right)=\dfrac{1}{2}$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{35}{12}\right)$.

Exercice 23 : Définir la fonction arcsin, réciproque de sin sur des intervalles à préciser et donner l'expression de sa dérivée sur cet ensemble.

IV/ Propriétés algébriques

Exercice 24 (À retenir) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ deux applications telles que :

$$f \circ g = id_{\mathrm{F}} \quad \text{et} \quad g \circ f = id_{\mathrm{E}}.$$

Montrer que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Correction : On sait que id_{F} et id_{E} sont injectives, on en déduit que g et f sont injectives.

On sait aussi que id_{F} et id_{E} sont surjectives, on en déduit que f et g sont surjectives.

Ce sont donc deux bijections, d'où $f = g^{-1} \circ id_{\mathrm{E}} = g^{-1}$.

Exercice 25 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications et A une partie de E.

Montrer que $(g \circ f)(\mathrm{A}) = g(f(\mathrm{A}))$.

Correction : $z \in g(f(\mathrm{A})) \iff \exists y \in f(\mathrm{A}),\ z = g(y) \iff \exists x \in \mathrm{A},\ z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$
$\iff z \in (g \circ f)(\mathrm{A})$.

Exercice 26 :

1. Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications et B une partie de G.

   Montrer que $(g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B}))$.
2. Montrer que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective si, et seulement si pour tout partie A de E on a :

$$f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}.$$

Correction : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

1. $x \in (g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) \iff g(f(x)) \in \mathrm{B} \iff f(x) \in g^{-1}(\mathrm{B})$
   $\iff x \in f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B}))$.
2. Supposons f injective et considérons A une partie de E.

   On sait que $\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A}))$. Si $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$, alors $f(x) \in f(\mathrm{A})$, donc il existe $y \in \mathrm{A}$ tel que $f(x) = f(y)$.

   comme f est injective, on obtient alors $x = y$ et donc $x \in \mathrm{A}$. Donc $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$.

Réciproquement, si pour tout partie A de E on a $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$.

En particulier, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $f^{-1}\Big(f(\{x\})\Big) = \{x\}$.

D'où, si $f(y) = f(x) \in f^{-1}\Big(f(\{x\})\Big)$ alors $y \in \{x\}$ *i.e.* $y = x$.

L'application f est donc injective.

Exercice 27 : Soient E, F et G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$, $g \in \mathcal{F}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ et on définit l'application $h \in \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\times\mathrm{G})$ par :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ h(x) = (f(x)\,;g(x))\,.$$

1. Démontrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi.
2. Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 28 : Soient E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{E})$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si, et seulement si f est surjective.

Exercice 29 : Soit E un ensemble non vide et f une application de E vers $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

En considérant la partie $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut pas être surjective.

Correction : Par l'absurde, supposons f est surjective *i.e.* il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f(x_0) = \mathrm{A}$.

x_0 ne peut appartenir qu'à A ou $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$:

— Si $x_0 \in \mathrm{A}$, alors $x_0 \in f(x_0)$ et donc $x_0 \notin \mathrm{A}$ (par définition de A), ce qui est absurde.

— Si $x_0 \notin \mathrm{A}$ alors $x_0 \notin f(x_0)$ et donc $x_0 \in \mathrm{A}$, ce qui est de nouveau absurde.

Par conséquent f ne peut pas être surjective.