

Arithmétique et applications

Exercice 1 – Étude complète de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x \ln |x||$.

(Domaine de définition, domaine d'étude, branches infinies, dérivabilité notamment en 0 et 1, courbe représentative.)

Exercice 2 – On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p.$$

En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p} .

4. Montrer que $\forall n, m > 2, F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.

5. Montrer que, si $n > 5$ et F_n est premier, alors n est premier.

La réciproque est-elle vraie? (On pourra chercher sur internet, une liste des 20 premiers nombres de Fibonacci.)

6. (**Hors-programme**) Vérifier que F_8 est le premier terme non nul de la suite divisible par 7, puis montrer que F_n est divisible par 7 si et seulement si n est un multiple de 8.

(Indication : On pourra calculer dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.)