Arithmétique et Applications

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x\ln|x||\,. \end{array}$$

Correction de l'exercice 1 –

1. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $x \longmapsto |x|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[\,.$$

$\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

Commentaires : *Ne soyez pas bébés et n'oubliez pas la symétrie du domaine de définition svp !*

On étudiera donc f seulement sur $\mathcal{D}_e = \mathbb{R}_+^*$ et on complètera la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées.

2. D'après les théorèmes sur les limites de composées et de produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Commentaires : *Si vous donnez les limites en $-\infty$ pensez à le faire par symétrie et ne les recalculez pas !*

D'après les théorèmes sur les croissances comparées $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Le prolongement est alors continu sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \longmapsto \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et s'annule pour $x = 1$.

D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est donc dérivable sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

Regardons la limite du taux d'accroissement en 1 :

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{|(1+h)\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Pour $(-1<)h<0$, $1+h<1$ donc $\ln(1+h)<0$ et $|\ln(1+h)| = -\ln(1+h)$ d'où,

$$\lim_{\substack{h\to0\\h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h<0}} \frac{|(1+h)\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Sa courbe y admet deux demi-tangentes de coefficient directeur ±1.

Regardons la limite du taux d'accroissement en 0 :

Pour $0 < h(<1)$, $\ln(h) < 0$ d'où,

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{|h\ln|h||}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} -\ln(h) = +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. Sa courbe y admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Commentaires : *Le fait que nous puissions prolonger f par continuité en 0 nous autorise à s'interroger sur sa dérivabilité en ce point.*

Enfin,

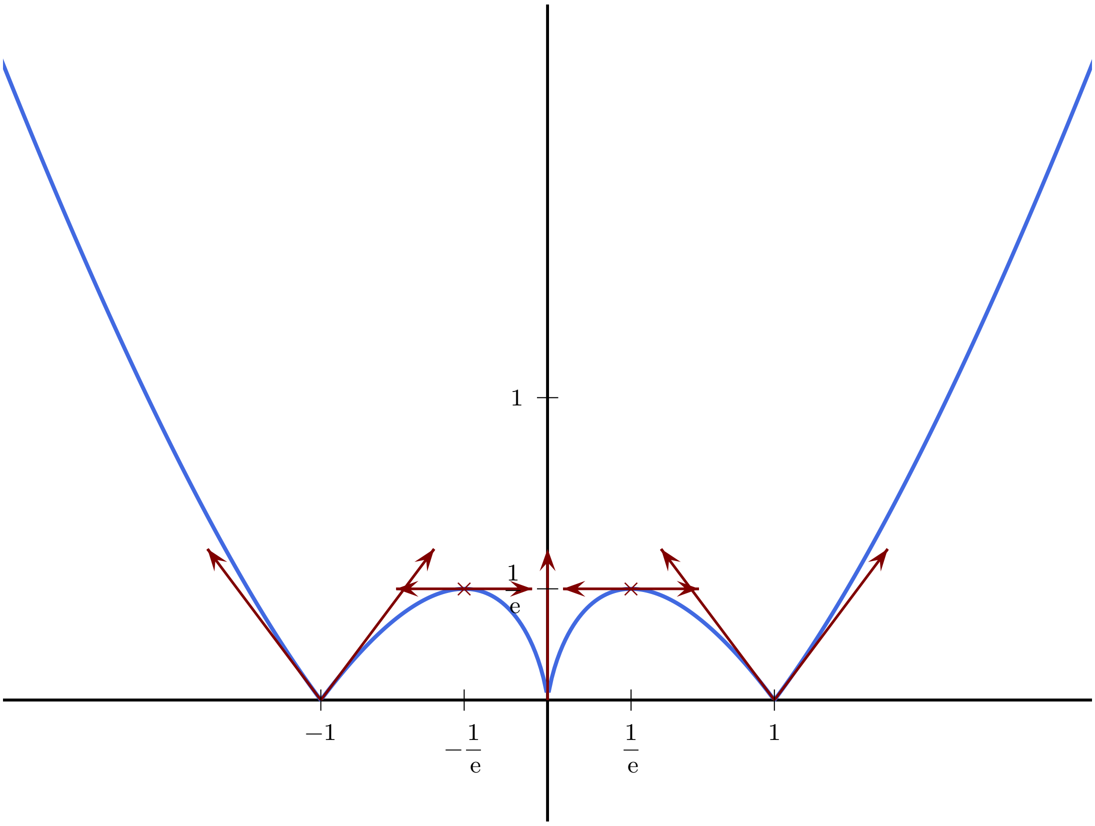
(a) $\forall\, x \in\,]1\,;+\infty[$, $f'(x) = \ln(x)+1 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

(b) $\forall\, x \in\,]0\,;1[$, $f'(x) = -\ln(x) - 1$ qui s'annule en $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On en déduit la tableau de variation complet de f par symétrie :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0	↗	$+\infty$

4\.



Correction de l'exercice 2 –

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété.

   Pour $n = 1$, on a $F_2F_0 - F_1^2 = 1$ *i.e.* $0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$. La propriété est vraie.

   Supposons qu'il existe un rang n fixé, tel que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

On a alors, en utilisant la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{n+2}\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n+1}^2 &= \left(\mathrm{F}_{n+1}+\mathrm{F}_n\right)\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n+1}^2\\ &= \mathrm{F}_n^2 + \mathrm{F}_{n+1}\left(\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n+1}\right)\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n+1} = -\mathrm{F}_{n-1}$, on a donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{F}_{n+2}\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n+1}^2 = \mathrm{F}_n^2 - \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n-1} = -\left(\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n-1} - \mathrm{F}_n^2\right) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

La propriétaire est donc héréditaire. Initialisée pour $n=1$, elle est donc vraie, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n-1} - \mathrm{F}_n^2 = (-1)^n.$$

2. Il est clair, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{F}_n \in \mathbb{N}$.

   Soit d un diviseur de F_n et F_{n+1}. Alors, par compatibilité de la relation de divisibilité avec les combinaisons linéaires entières, $d \mid (-1)^n$ *i.e.* $d = \pm 1$.

   Les nombres F_n et F_{n+1} sont donc premiers entre eux.

   Commentaires : *Sans se servir de la question précédente, on pouvait aussi revenir à la définition et dire que* $\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n-1} = \ldots = \mathrm{F}_1 \wedge \mathrm{F}_0 = 1$.

3. Montrons, par récurrence double sur $p \geqslant 1$, que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{F}_{n+p} = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{p-1} + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = 1$, grâce aux valeurs de F_0 et F_1, on a

$$\mathrm{F}_n\mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_n \cdot 0 \mathrm{F}_{n+1} \cdot 1 = \mathrm{F}_{n+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = 2$, par la relation de récurrence et les valeurs de F_1 et F_2, on a

$$\mathrm{F}_n\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_n \cdot 1 + \mathrm{F}_{n+1} \cdot 1 = \mathrm{F}_{n+2}.$$

La propriété est donc initialisée sur les deux premiers rangs.

Supposons que pour un entier p fixé, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{F}_{n+p} = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{p-1} + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_p \ \text{ et } \ \mathrm{F}_{n+p+1} = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_p + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{p+1}.$$

Considérons le rang $p+2$. Grâce à la relation de récurrence, on a :

$$\mathrm{F}_{n+p+2} = \mathrm{F}_{n+p+1} + \mathrm{F}_{n+p}$$

En utilisant la double hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{F}_{n+p+2} = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_p + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{p+1} + \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{p-1} + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_p = \mathrm{F}_n\left(\mathrm{F}_p + \mathrm{F}_{p-1}\right) + \mathrm{F}_{n+1}\left(\mathrm{F}_{p+1} + \mathrm{F}_p\right).$$

Soit

$$\mathrm{F}_{n+p+2} = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{p+1} + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{p+2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence double, on conclut :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{F}_{n+p} = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{p-1} + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_p.$$

Soient $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur commun à F_n et F_p.

D'après la relation précédente, $d|\mathrm{F}_{n+p}$ donc $d|\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n+p}$ qui entraine $\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_p|\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n+p}$.

De même, $\mathrm{F}_{n+p} - \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{p-1} = \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_p$ entraine que tout diviseur d commun à F_n et F_{n+p} divise $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_p$. Comme F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux, d, diviseur de F_n est aussi premier avec F_n donc divise F_{n+p} et encore $d|\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_p$ puis $\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n+p}|\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_p$.

Conclusion, $\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_p = \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n+p}$.

4. Supposons $m > n$ (les autres cas en découle) et posons $m = n + p$. La relation précédente, s'écrit :

$$\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_m = \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n+p} = \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_p.$$

Si la division euclidienne de m par n s'écrit $m = np + r_0$ avec $0 \leqslant r_0 < n$ alors, en itérant le raisonnement, on obtient :

$$\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_m = \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n+p} = \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{r_0}.$$

Appliquons l'algoritmhe d'Euclide :

$$\begin{array}{rlcl}
m &= np + r_0 & \qquad & \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_m = \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{r_0} \\
n &= r_0p_0 + r_1 & & \mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{r_0} = \mathrm{F}_{r_0} \wedge \mathrm{F}_{r_1} \\
r_0 &= r_1p_1 + r_2 & & \mathrm{F}_{r_0} \wedge \mathrm{F}_{r_1} = \mathrm{F}_{r_1} \wedge \mathrm{F}_{r_2} \\
&\vdots & & \\
r_k &= r_{k+1}p_{k+1} + m \wedge n & & \mathrm{F}_{r_k} \wedge \mathrm{F}_{r_{k+1}} = \mathrm{F}_{r_{k+1}} \wedge \mathrm{F}_{m\wedge n} \\
r_{k+1} &= r_{k+2} \times (m \wedge n) + 0 & & \mathrm{F}_{r_{k+1}} \wedge \mathrm{F}_{m\wedge n} = \mathrm{F}_{m\wedge n} \wedge \mathrm{F}_0.
\end{array}$$

Par transitivité de l'égalité, on obtient $\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_m = \mathrm{F}_{m\wedge n} \wedge \mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_{m\wedge n} \wedge 0 = \mathrm{F}_{m\wedge n}$.

5. Montrons la contraposée de ce résultat en supposant $n = n_1n_2$ avec n_1, n_2 deux entiers supérieurs à 2. On a alors :

$$\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_{n_1} = \mathrm{F}_{n\wedge n_1} = \mathrm{F}_{n_1}.$$

Il est clair que la définition de F_n entraîne que la suite $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc F_{n_1} est un diviseur strict de F_n qui n'est donc pas premier.

La réciproque est fausse, mais il faut aller chercher $\mathrm{F}_{19} = 4181 = 37 \times 113$, comme premier contre-exemple…

6. On calcule modulo 7, les termes de la suite et on obtient :

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{F}_0 \equiv 0[7] & \mathrm{F}_1 \equiv 1[7] & \mathrm{F}_2 \equiv 1[7] & \mathrm{F}_3 \equiv 2[7] & \mathrm{F}_4 \equiv 3[7] & \mathrm{F}_5 \equiv 5[7] \\
\mathrm{F}_6 \equiv 1[7] & \mathrm{F}_7 \equiv 6[7] & \mathrm{F}_8 \equiv 0[7] & \mathrm{F}_9 \equiv 6[7] & \mathrm{F}_{10} \equiv 6[7] & \mathrm{F}_{11} \equiv 5[7] \\
\mathrm{F}_{12} \equiv 4[7] & \mathrm{F}_{13} \equiv 2[7] & \mathrm{F}_{14} \equiv 6[7] & \mathrm{F}_{15} \equiv 1[7] & \mathrm{F}_{16} \equiv 0[7] & \mathrm{F}_{17} \equiv 1[17]
\end{array}$$

On remarque de $\mathrm{F}_0 \equiv \mathrm{F}_{16}[7]$ et $\mathrm{F}_1 \equiv \mathrm{F}_{17}[1]$. La suite modulo 7 est donc périodique de période 16.

On remarque aussi que pour $k \in [0, 15]$, seule F_0 et F_8 sont divisible par 7.

On conclut que F_8 est le premier terme non nul de la suite divisible par 7 et que F_n est divisible par 7 si, et seulement si n est un multiple de 8.