Applications

Compléter :

Proposition 1 :
Soit $\mathscr{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathscr{R}$ est :

— *Réflexive* lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ x\mathscr{R}x.$$

— *Antisymétrique* lorsque :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ (x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}x) \implies x = y.$$

Exemples 2 : Sur les ensembles adéquats :

— La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

— La relation $\mathscr{R}$ définie par $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y - x$ est réflexive, symétrique et transitive.

— La relation // est réflexive, symétrique et transitive.

— La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 3 : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 4 (Parties bornées) : Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

— A est *minorée* dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x.$

— A admet un *maximum* lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b.$

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$.

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si $x > 1$.

Donc $\mathcal{D}_f =]1 ; +\infty[$.

Définition 8 (Coïncidence) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}'$ deux applications.

On dit que f et g *coïncident* sur une partie A de $\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ si $\forall\, x \in \mathrm{A},\ f(x) = g(x)$.

Exercice 5 : Soient les fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)^2. \end{array}$

Déterminer la fonction $g \circ f$ et préciser son domaine de définition.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, domaine de définition de g donc la fonction $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$(g \circ f)(x) = (\ln(x) - 1)^2 .$$

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathscr{C}_f$) :
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

— $x \longmapsto f(x-a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\imath}$.

— $x \longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a .

Exercice 7 : Sans calcul de dérivée, donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \ln\left((x-1)^2 + 1\right)$.

La fonction logarithme est croissante sur son domaine de définition donc f a les mêmes variations que $x \longmapsto (x-1)^2+1$ qui est décroissante sur $]-\infty ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

— On dit que f est *dérivable en a* si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \to a$, $x \neq a$.

Proposition 8 :
Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

(i) Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(ii) Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont *le dénominateur ne s'annule pas en a* est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Théorème 10 :
Soient I un (seul) intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

— f est strictement croissante sur I si, et seulement si
f' est positive sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathrm{I}$ avec $a < b$.

Définition 21 : Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

— On dit que f est *continue en* a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

(i) Si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème 12 :
Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

1. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve :

1. Soit $z \in \mathrm{G}$. Par surjectivité de g sur G, il existe $y_z \in \mathrm{F}$ tel que $z = g(y)$.

   Par surjectivité de f sur F, il existe aussi $x_y \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.

   Par définition de $(g \circ f)$, on a donc trouvé $x \in \mathrm{E}$ tel que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ *i.e.* $(g \circ f)$ est surjective sur G.

2. Réciproquement soit $z \in \mathrm{G}$.

   Par surjectivité de $(g \circ f)$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(g \circ f)(x) = z$ *i.e.* $f(x) \in \mathrm{F}$ tel que $g(f(x)) = z$ donc g est surjective sur G.

Applications

Théorème 13 (Théorème de la bijection) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$.

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle d'un des types suivants :

	I	$[a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b]$	$]a\,;b[$
$f(\mathrm{I})$	f croissante	$[f(a)\,;f(b)]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$

Exercice 8 : Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, donner la forme la plus simple possible de la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

1. $$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$
2. $$g'(x) = \left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \times \frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Applications

Applications

Compléter :

Proposition 1 :
Soit $\mathscr{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathscr{R}$ est :

- *Symétrique* lorsque le graphe de $\mathscr{R}$ est symétrique :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x.$$

- *Transitive* lorsque :

$$\forall\, x, y, z \in \mathrm{E},\ (x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z.$$

Exemples 2 : Sur les ensembles adéquats :

- L'égalité est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $\perp$ est symétrique.
- La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 2 : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation de E dans E.

On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 4 (Parties bornées) : Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A admet un *minimum* lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln\left(x^2 - 2x + 1\right)}$.

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \longmapsto x^2 - 2x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0\,;+\infty]$ ne s'annulant que pour $x = 1$ et ne valant 1 que pour $x = 0$ ou $x = 2$ là où ln s'annule.

Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[\cup]1\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

Définition 10 (Prolongement) : Soient $f :\ \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$, on appelle *prolongement* de f à E', notée en général $\tilde{f}$, l'application $\tilde{f} :\ \mathrm{E}' \longmapsto \mathrm{F}$ qui coïncide avec f sur E.

Exercice 5 : Soient les fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)^2 \end{array}$.

Déterminer la fonction $f \circ g$ et préciser son domaine de définition.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant qu'en $x = 1$.

La fonction $f \circ g$ est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $(f \circ g)(x) = \ln\left((x-1)^2\right)$.

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathscr{C}_f$) :
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

— $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.

— $x \longmapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\dfrac{1}{a}$.

Exercice 7 : Sans calcul de dérivée, donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{(x-1)^2}$.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc f a les mêmes variations que $x \longmapsto (x-1)^2$ qui est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Proposition 8 :
Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

(i) Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

(ii) L'inverse d'une fonction dérivable en a et *ne s'annulant pas en a* est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

Théorème 9 (Dérivée d'une composée) :
Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Théorème 10 :
Soient I un (seul) intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

— f est strictement décroissante sur I si, et seulement si
f' est négative sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathrm{I}$ avec $a < b$.

Définition 21 : Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

— On dit que f est *continue en a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

(i) Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Théorème 15 :
Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Preuve :

1. Soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.

   Par définition de la composée, on a alors $g(f(x)) = g(f(y))$ qui entraîne $f(x) = f(y)$ par injectivité de g puis $x = y$ par celle de f.

   Donc $x = y$ et $(g \circ f)$ est injective.
2. Réciproquement, soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = f(y)$.

   Alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ en composant (à gauche) par g puis $x = y$ par injectivité de $(g \circ f)$ d'où l'injectivité de f.

Applications

Théorème 16 (Théorème de la bijection) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$.

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle d'un des types suivants :

	I	$[a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b]$	$]a\,;b[$
$f(\mathrm{I})$	f décroissante	$[f(b)\,;f(a)]$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;f(a)\right]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$

Exercice 8 : Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, donner la forme la plus simple possible de la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$

1. $$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
2. $$g'(x) = \frac{(-\sin(x) - \cos(x))(\cos(x) + \sin(x)) - (\cos(x) - \sin(x))(-\sin(x) + \cos(x))}{(\cos(x) + \sin(x))^2}$$
$$= -\frac{(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2}{(\cos(x) + \sin(x))^2}$$
$$= -\frac{2}{(\cos(x) + \sin(x))^2}.$$

Applications