

Raisonnement, Arithmétique et Applications

14 mars 2025

Durée : 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1 – Énoncer pour chaque proposition \mathcal{P} qui suit, la proposition $(\text{non } \mathcal{P})$.

1. S'il pleut alors je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. Dans la classe, il y a 16 filles et 18 garçons.
5. Dans la classe, il y a autant de filles que de garçons.

Exercice 2 – Soit $x \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions rationnelles.

Pour ce faire, on raisonne par l'absurde.

1. Écrire la supposition initiale de ce raisonnement. On notera $\frac{a}{b}$ la solution réduite.
2. Montrer que $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$.
3. En déduire que b divise a^3 et a divise b^3 .
4. Montrer alors que $a = b$ puis conclure.

Exercice 3 – On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2e^x + 3}{e^x + 1} \end{aligned}$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et en donner leurs interprétations graphiques correspondantes.
2. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
3. En déduire le tableau de variation complet de f .
4. Calculer $f(0)$ et justifier que le graphe de f admet une tangente en 0 dont on donnera l'équation.
5. Justifier que f définit une bijection de \mathbb{R} dans un ensemble J à préciser.
6. Préciser les variations de f^{-1} sur J . Comment obtient-on le graphe de f^{-1} en fonction de celui de f ?
7. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et donner, pour tout $x \in J$, l'expression de $(f^{-1})'(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$.
8. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f^{-1} en $\frac{5}{2}$.
9. Sur la feuille donnée en annexe et À RENDRE AVEC LA COPIE, tracer les graphes de f , f^{-1} ainsi que TOUTES les droites particulières trouvées précédemment.
10. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $(f(x))^2 - 5f(x) + 6$.
11. En déduire pour $x \in J$, une expression de $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x .
12. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}.$$

13. En déduire f^{-1} .
14. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

Exercice 4 – Soient A et B deux parties d'un ensemble E , on définit la différence symétrique de A et B par

$$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}),$$

en notant \bar{A} et \bar{B} les complémentaires respectifs de A et B dans E :

$$\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\} \quad \text{et} \quad \bar{B} = \{x \in E, x \notin B\}.$$

1. Donner une définition de la différence symétrique $A\Delta B$ par compréhension.
2. Soit A une partie de E . Donner $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, et $A\Delta A$.
3. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4. L'opération est-elle commutative ?

On admettra dans la suite de cet exercice que l'opération Δ est associative.

5. Soit C une partie de E . Montrer que $A\Delta B = A\Delta C$ si et seulement si $B = C$.
6. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $A\Delta X = \emptyset$.
7. Montrer que l'application $\varphi : X \mapsto A\Delta X$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même. Quelle est la réciproque de cette application ?

Nom :

Prénom :

ANNEXE

Exercice 3 –

