Raisonnement, Arithmétique et Applications

Commentaires : *Pensez à vous connecter si vous voulez voir vos notes.*

Commentaires : ***AUTO-DICTÉE :*** *une tangente, s'annule, une fonction définit, une fonction est définie, quotient, on conclut, la dérivée est non nulle, un raisonnement, à valeurs dans, un rationnel, une solution rationnelle*

Correction de l'exercice 1 –

1. $\rceil \implies$: Il pleut et je ne prends pas mon parapluie.
2. $\rceil\exists$: Il y a eu un été où il n'a pas plu en Bretagne.
3. $\rceil\forall$: L'été dernier, il y a eu un jour où il n'a pas plus en Bretagne.
4. $\rceil\wedge$: Dans la classe, il n'y a pas 16 filles, ou il n'y a pas 18 garçons. (ou inclusif)
5. $\rceil =$: Dans la classe, il y a un nombre différent de filles et de garçons.

Correction de l'exercice 2 –

1. Supposons que $x^3 + x + 1$ admette une racine rationnelle de la forme $\dfrac{a}{b}$ où $(a\,;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(a,b) = 1$.
2. Par hypothèse, on a donc $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 + \dfrac{a}{b} + 1 = 0$ puis $\dfrac{a^3 + ab^2 + b^3}{b^3} = 0$ en réduisant au même dénominateur.

   Comme $b \neq 0$, ceci est équivalent à $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$

   Commentaires : *Si vous ne dites pas que le dénominateur est nul, la nullité d'une fraction n'est pas équivalente à celle de son numérateur.*
3. D'après l'équation précédente, on a $a^3 = -\left(ab^2 + b^3\right) = b\left(-ab - b^2\right)$ donc b divise a^3.

   De même, $b^3 = -\left(ab^2 + a^3\right) = a\left(-b^2 - a^2\right)$ entraîne a divise b^3.

   Commentaires : *La divisibilité dans $\mathbb{Z}$ est un problème multiplicatif donc pas de fractions.*
4. Comme $\text{pgcd}(a,b) = 1$, on a aussi $\text{pgcd}\left(b, a^3\right) = 1$.

   Or, b divise a^3. Donc, $b = 1$.

   De la même manière $\text{pgcd}\left(a, b^3\right) = 1$ avec a divise b^3 entraîne à son tour $a = 1$.

   On aurait alors $\dfrac{a}{b} = 1$ racine de $x^3 + x + 1$ ce qui n'est pas et la contradiction.

   Conclusion : $x^3 + x + 1$ est un polynôme qui n'admet aucune racine rationnelle.

   Commentaires : *Méthode Solal : D'après (2), $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$.*

   Avec $a = b$, on aurait $3b^3 = 0 \implies b = 0$ qui est impossible.

Correction de l'exercice 3 –

1. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'après les théorèmes sur les limites de sommes et de produits, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$. La courbe de f admet en donc en $-\infty$ la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{3}{2\,\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{2\left(1+\dfrac{3}{2\,\mathrm{e}^x}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} \text{ car } \mathrm{e}^x \neq 0.$$

D'après les théorèmes sur les limites de sommes $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{3}{2\,\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$.

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. La courbe de f admet en donc en $+\infty$ la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote.

2. Comme $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x+1 \neq 0$, la fonction f quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x(\,\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^x(2\,\mathrm{e}^x+3)}{(\,\mathrm{e}^x+1)^2} = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\,\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit son tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$3 \searrow 2$

4. Un simple calcul donne $f(0) = \dfrac{5}{2}$.

Comme f est dérivable en 0, sa courbe admet une tangente (T_0) d'équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$:

$$(\mathrm{T}_0) :\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}.$$

Commentaires : *C'est toujours appréciable de voir un élève qui justifie l'existence d'un objet avant de le chercher : ici la tangente existe car f est dérivable sinon vous pouvez toujours chercher. Au mieux, vous en aurez deux moitié.*

Au passage, c'est f qui est dérivable et $\mathscr{C}_f$ qui admet une tangente.

5. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]2\,;3[$, d'après le théorème de la bijection, elle y établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{J} =]2\,;3[$.

Commentaires : *Dites bien que $\mathrm{J} = f(\mathbb{R}) = !$*

De plus, f n'admet rien du tout mais établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Bien sûr, on fera attention à bien mettre les bornes de $f(\mathbb{R})$ dans l'ordre sous peine d'affirmer que f arrive dans $\varnothing$ et de perdre des points.

6. Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, c'est également le cas de f^{-1} sur $\mathrm{J} = f(\mathbb{R}) =]2\,;3[$.

Commentaires : *La propriété porte sur le « strictement » donc les points aussi !*

Le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par la symétrie d'axe la première bissectrice d'équation $y = x$.

7. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

8. Comme $f(0) = \dfrac{5}{2}$, alors $f^{-1}\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{f'(0)} = -4.$

Donc,

$$\left(\mathrm{T}'_{\frac{5}{2}}\right) :\ y = -4\left(x - \frac{5}{2}\right) = -4x + 10.$$

Commentaires : *Lorsque ces éléments existent, le fait que* $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ *montre bien que la dérivée de la réciproque n'est pas la réciproque de la dérivée non ? Ce serait un peu trop simple !*

9. Voir ANNEXE.

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(f(x))^2 - 5f(x) + 6 &= \left(\frac{2\,\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x + 1}\right)^2 - 5\,\frac{2\,\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x + 1} + 6 \\ &= \frac{(2\,\mathrm{e}^x + 3)^2 - 5\,(2\,\mathrm{e}^x + 3)\,(\mathrm{e}^x + 1) + 6\,(\mathrm{e}^x + 1)^2}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{-\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = f'(x).\end{aligned}$$

11. D'après la question précédente, on a alors :

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\left(f(f^{-1}(x))\right)^2 - 5f(f^{-1}(x)) + 6} = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

12. Il est clair que $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$.

Raisonnons par analyse-synthèse en supposant qu'un tel couple $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ existe.

Alors, d'une part $(x-3)\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x-2}$ et, d'autre part, $(x-3)\left(f^{-1}\right)'(x) = a + \dfrac{b}{x-2}(x-3)$.
Ces fonctions sont alors parfaitement définies en $x = 3$ où l'on peut évaluer pour avoir :

$$\frac{1}{3-2} = a \iff a = 1.$$

De même en $x = 2$, on a $(x-2)\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{a}{x-3}(x-2) + b$ qui entraîne, pour $x = 2$:

$$\frac{1}{2-3} = b \iff b = -1.$$

Réciproquement, pour la synthèse, on vérifie que $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{(x-3)(x-2)} = \left(f^{-1}\right)'(x)$.

Conclusion, $\forall x \in \mathrm{J}$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2}$.

13. f^{-1} est la primitive de $\left(f^{-1}\right)'$ sur J qui s'annule en $\dfrac{5}{2}$. Donc, $\forall\, x \in \mathrm{J},\ f^{-1}(x) = \ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right| + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$0 = \ln\left|\frac{\frac{5}{2}-3}{\frac{5}{2}-2}\right| + \lambda \iff 0 = \ln\left|\frac{-1}{1}\right| + \lambda \iff \lambda = 0.$$

donc,

$$\forall\, x \in \left]2\,;3\right[\,,\ f^{-1}(x) = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| = \ln\left(\frac{3-x}{x-2}\right).$$

14. Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \left]2\,;3\right[$ et posons $y = f(x)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2\,\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x + 1} \\ &\iff (\mathrm{e}^x + 1)\,y = 2\,\mathrm{e}^x + 3, \qquad \text{car } \mathrm{e}^x + 1 \neq 0 \\ &\iff (y-2)\,\mathrm{e}^x = 3 - y \\ &\iff \mathrm{e}^x = \frac{3-y}{y-2} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{3-y}{y-2}\right) \qquad \text{car } \frac{3-y}{y-2} > 0,\ \forall\, y \in \left]2\,;3\right[. \end{aligned}$$

Donc, $\forall\, x \in \left]2\,;3\right[,\ f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{x-2}\right)$.

Correction de l'exercice 4 –

1. Par définition,

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \Big\{x \in \mathrm{E},\ \big((x \in \mathrm{A}) \wedge (x \notin \mathrm{B})\big) \vee \big((x \notin \mathrm{A}) \wedge (x \in \mathrm{B})\big)\Big\}.$$

2.
   — $\mathrm{A}\Delta\varnothing = (\mathrm{A} \cap \overline{\varnothing}) \cup (\varnothing \cap \overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{A} \cup \varnothing = \mathrm{A}$.
   — $\mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{E}}) \cup (\mathrm{E} \cap \overline{\mathrm{A}}) = \varnothing \cup \overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}}$.

   Autrement dit, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{E}$ est le complémentaire de A dans E.
   — $\mathrm{A}\Delta\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}}) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

3. Soit $x \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

   Si $x \in \mathrm{A}$ alors $x \notin \mathrm{B}$ car $x \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ donc $(x \in \mathrm{A}) \wedge (x \notin \mathrm{B})$ *i.e.* $x \in \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$. Le raisonnement est analogue si $x \in \mathrm{B}$ donc $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$.

   Réciproquement, soit $x \in \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$.

   Si $x \in \mathrm{A}$ alors $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et $x \notin \mathrm{B}$ entraîne $x \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ donc $x \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. De même si $x \in \mathrm{B}$ donc $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} \subset (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

   Par double inclusion, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

   Commentaires : *Avec la distributivité de $\cap$ et $\cup$:*

$$\begin{aligned} (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \cup (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) &= ((\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \cup \mathrm{B}) \cap \big((\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \cup \overline{\mathrm{A}}\big) \\ &= \Big((\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \underbrace{(\overline{\mathrm{B}} \cup \mathrm{B})}_{=\mathrm{E}}\Big) \cap \Big(\underbrace{(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}})}_{=\mathrm{E}} \cap (\overline{\mathrm{B}} \cup \overline{\mathrm{A}})\Big) \\ &= (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\overline{\mathrm{B}} \cup \overline{\mathrm{A}}) \\ &= (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\overline{\mathrm{B} \cap \mathrm{A}}) \\ &= (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}). \end{aligned}$$

Ethane l'a montré avec les tables de vérité. Ça marche aussi.

4. Par commutativité de $\cup$ et $\cap$, il est clair que $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B) = (B \cup A)\backslash(B \cap A) = B\Delta A$.

   L'opération Δ est donc commutative.

5. Si $B = C$, le résultat est clair.

   Réciproquement, soit $x \in B$. Par disjonction de cas :
   - Si $x \notin A$ alors $x \in A\Delta B = A\Delta C$ qui entraîne $x \in C$.
   - Si $x \in A$ alors $x \notin A\Delta B = A\Delta C = (A \cup C)\backslash(A \cap C)$ donc $x \in A \cap C \subset C$ et encore $x \in C$.

   Dans tous les cas, $x \in B \implies x \in C$ donc $B \subset C$.

   Par symétrie du rôle joué par B et C, l'inclusion réciproque s'obtient de la même manière.

   Donc $B = C$.

   En conclusion, $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$.

6. On sait déjà, d'après (2), que A est solution.

   Réciproquement, d'après la question (3), $A\Delta X = \varnothing \implies (A \cup X) \setminus (A \cap X) = \varnothing$.

   Cela signifie que $A \cup X = A \cap X$ qui n'est vraie que si, et seulement si $X = A$, car sinon il existerait un élément dans $A \cup X$ qui n'est pas dans $A \cap X$.

   Ainsi, la seule solution est $X = A$.

7. (a) Par définition, de $A\Delta B$, φ est une fonction de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$.
   (b) D'après (5) et par commutativité de l'opération Δ, $A\Delta X = A'\Delta X$ entraîne $A = A'$ donc φ est bien une application.
   (c) Toujours d'après (5), $\varphi(X) = \varphi(Y) \iff A\Delta X = A\Delta Y$ entraîne $X = Y$ donc φ est injective sur $\mathscr{P}(E)$.
   (d) Soit $Y \in \mathscr{P}(E)$ et cherchons $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\varphi(X) = Y$.

   Par associativité et commutativité de Δ, en composant à gauche par A et d'après les résultats de (2), on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(X) = Y &\iff A\Delta X = Y \\
&\implies A\Delta\Big(A\Delta X\Big) = A\Delta Y \\
&\implies \Big(A\Delta A\Big)\Delta X = A\Delta Y \\
&\implies \varnothing\Delta X = A\Delta Y \\
&\implies X = A\Delta Y.
\end{aligned}$$

   $X = A\Delta Y \in \mathscr{P}(E)$ est donc un antécédent de Y. L'application φ est surjective sur $\mathscr{P}(E)$.

   En conclusion, correctement définie, injective et surjective de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même, l'application φ est une bijection.

   Sa réciproque φ^{-1}est donnée par $\varphi^{-1} : Y \longmapsto A\Delta Y$ autrement dit $\varphi = \varphi^{-1}$ est involutive.

Raisonnement, Arithmétique et Applications

ANNEXE

Exercice 3 –