Nom : .... **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 1 : Calculer $270 \wedge 105$ et $270 \vee 105$.

Exercice 2 :

1. Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^3 - 1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser).
2. Retrouver le résultat de la question précédente et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 3 : Montrer $\forall\, n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective.

Exercice 1 : Résoudre l'inéquation $\ln(2x+1)+\ln(x+3) \leqslant \ln 3$.

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$

Exercice 3 : Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

Nom : .... **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : Montrer que la composée de deux fonctions injectives (resp. surjectives) est injective (resp. surjective et la réciproque partielle avec un contre-exemple.

Exercice 1 : Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 2 : Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est bijective de $[1,+\infty[$ sur son image (à préciser) et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

Exercice 3 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : Existence et unicité d'un couple $(q\,;r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

Exercice 1 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

1. $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
2. $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la corestriction ϕ de f à $f(\mathbb{R})$ est bijective.
3. Déterminer sa bijection réciproque ϕ^{-1}.

Exercice 3 : Montrer pour tous $x \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}$: ;$1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : Existence de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 1 : Calculer le pgcd des nombres 390, 720, 450.

Exercice 2 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : Démontrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{N}$.

Exercice 1 : Soient a et b des entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

Calculer le pgcd et le ppcm de $a+b$ et ab.

Exercice 2 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+dx+3}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que :

— Le point $\mathrm{A}(2, -11)$ appartienne à la courbe de f, et sa tangente en ce point ait pour coefficient directeur -9.

— Les droites d'équation $x = 1$ et $y = 2$ soient asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : Le pgcd est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 2 : Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Arithmétique et Applications

Question de cours : Dérivabilité de la fonction réciproque sous les hypothèses *ad hoc* qui devront être énoncées clairement.

Exercice 1 : Calculer $\text{pgcd}\,(18480\,;9828)$.

En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 2 : Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1. $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$.
2. $x \longmapsto 1+\ln(2-x)$.

Exercice 3 : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$(x_1+x_2+\cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$