Arithmétique et Applications

Question de cours : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 1 : Calculer $270 \wedge 105$ et $270 \vee 105$.

Correction : $270 = 2 \times 3^3 \times 5$ et $105 = 3 \times 5 \times 7$. Donc $270 \wedge 105 = 15$ et $270 \vee 105 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 1890$.

Exercice 2 :

1. Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^3 - 1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser).
2. Retrouver le résultat de la question précédente et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 3 : Montrer $\forall n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$.

Arithmétique et Applications

Question de cours : Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective.

Exercice 1 : Résoudre l'inéquation $\ln(2x+1)+\ln(x+3) \leqslant \ln 3$.

Correction : On résout sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

$\ln(2x+1)+\ln(x+3) \leqslant \ln 3 \iff (2x+1)(x+3) \leqslant 3 \iff x(2x+7) \leqslant 0$.

$\mathcal{S} = \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

Exercice 3 : Pour tout $x>0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

Correction :

1. $\forall x>0, \quad f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$.
2. $f^{-1} : y \mapsto \ln \dfrac{y}{y-1}$.

Arithmétique et Applications

Question de cours : Montrer que la composée de deux fonctions injectives (resp. surjectives) est injective (resp. surjective et la réciproque partielle avec un contre-exemple.

Exercice 1 : Combien $15!$ admet-il de diviseurs ?

Correction : Écrivons la décomposition de $15! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots 15$ en facteurs premiers.

$$15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13.$$

Un diviseur de $15!$ s'écrit $d = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta \times 11^\epsilon \times 13^\eta$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 11$, $0 \leqslant \beta \leqslant 6$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 3$, $0 \leqslant \delta \leqslant 2$, $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de $15!$.

Le nombre de diviseurs est donc $(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4032$.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser) et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

Exercice 3 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

Arithmétique et Applications

Question de cours : Existence et unicité d'un couple $(q\,;r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

Exercice 1 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

1. $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
2. $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Correction : Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un multiple de 2, un multiple de 3, un multiple de 4 (distinct du multiple de 2).

Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la corestriction ϕ de f à $f(\mathbb{R})$ est bijective.
3. Déterminer sa bijection réciproque ϕ^{-1}.

Exercice 3 : Montrer pour tous $x \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}$: ; $1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$.

Arithmétique et Applications

Question de cours : Existence de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 1 : Calculer le pgcd des nombres 390, 720, 450.

Correction : Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers :

$$390 = 2.3.5.13,\ 720 = 2^4.3^2.5,\ 450 = 2.3^2.5^2.$$

Donc le pgcd de ces trois nombres est $2.3.5 = 30$.

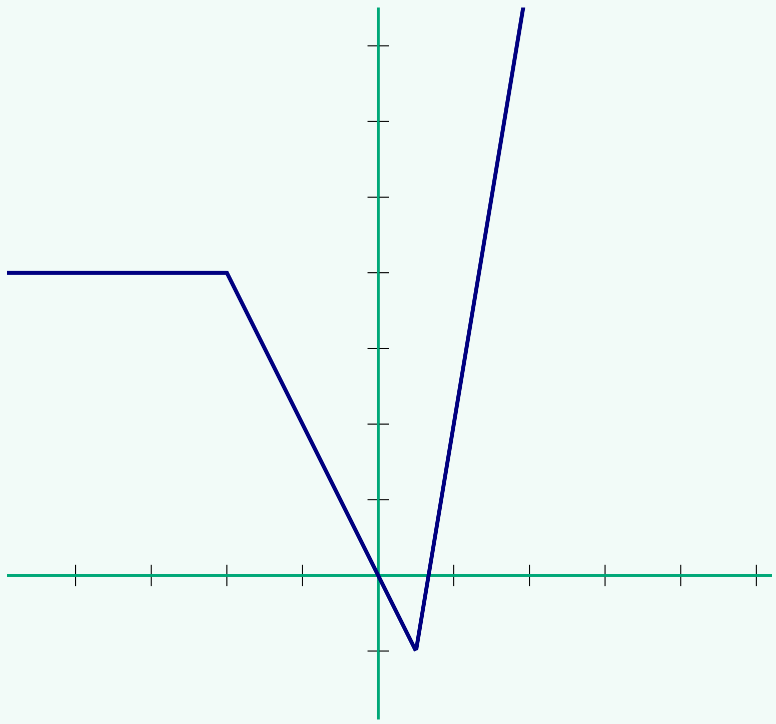
Exercice 2 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.

Correction : On notera $\mathcal{C}_i$ le graphe de f_i.

f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$. On précise dans un tableau l'expression de $f_1(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$1/2$	$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$f_1(x)$	4	$-2x$	$6x-4$

On en déduit $\mathcal{C}_1$.



Exercice 3 : Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Arithmétique et Applications

Question de cours : Démontrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{N}$.

Exercice 1 : Soient a et b des entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

Calculer le pgcd et le ppcm de $a+b$ et ab.

Correction : Soit d un diviseur commun à $a+b$ et de ab.

On a $d|a(a+b)$ et comme $d|ab$, $d|a^2$.

De même,$d|b^2$. Donc $d|(a^2 \wedge b^2)$.

Or $a \wedge b = 1$ donc $a^2 \wedge b^2 = 1$ et par suite, $d = 1$. Donc,

$$(a+b) \wedge (ab) = 1 \quad \text{et} \quad (a+b) \vee (ab) = ab(a+b).$$

Exercice 2 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+dx+3}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que :

— Le point A$(2,-11)$ appartienne à la courbe de f, et sa tangente en ce point ait pour coefficient directeur -9.

— Les droites d'équation $x = 1$ et $y = 2$ soient asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Arithmétique et Applications

Question de cours : Le pgcd est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction : $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$.

Par récurrence, on obtient $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

En supposant $a_n \wedge b_n = 1$, on obtient :

$a_{n+1} \wedge b_{n+1} = (a_n + 2b_n) \wedge (a_n + b_n) = b_n \wedge (a_n + b_n) = a_n \wedge b_n = 1$.

Comme $a_1 \wedge b_1 = 1$, la propriété s'établit par récurrence.

Exercice 2 : Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

Arithmétique et Applications

Question de cours : Dérivabilité de la fonction réciproque sous les hypothèses *ad hoc* qui devront être énoncées clairement.

Exercice 1 : Calculer $\text{pgcd}\,(18480\,;9828)$.

En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Correction :

1. $\text{pgcd}\,(18480\,;9828) = 84\,;$
2. $25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Exercice 2 : Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1. $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$.
2. $x \longmapsto 1 + \ln(2-x)$.

Exercice 3 : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$