Fonctions de référence

Compléter :

Rappel 1 : La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3 (Logarithme népérien) : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée ln, l'unique primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En particulier, le domaine de définition est imposé par la définition :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\ln} = \left]0\,;+\infty\right[.}$$

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2-x}{x-1}\right)$

$x \longmapsto \dfrac{2-x}{x-1}$ est définie à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si $x \in]1\,;2[$ donc $\mathcal{D}_f =]1\,;2[$.

Théorème 4 (Variations) :
- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 5 :
Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a :

$$\Big(\ln u\Big)' = \frac{u'}{u}.$$

Fonctions de référence

Exercice 2 : Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée de $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)$.

$x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ est définie si, et seulement si $x \neq 0$ et du signe de son dénominateur.

Donc $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$.

Sur cet intervalle $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et à valeurs strictement positives donc f est dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \frac{\dfrac{-4\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}} = -\frac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{2x}-1\right)}.$$

Commentaires : *Vous venez de montrer que* $\left(\ln\left(\mathrm{th}\,(x)\right)\right)' = \dfrac{2}{\mathrm{sh}\,(2x)}$.

Proposition 6 (Propriétés algébriques) :
Soient $a,\, b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{Q},\quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

Exercice 3 : Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$.

Par croissance du logarithme :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7} \iff -n\ln(3) \leqslant -7\ln(10) \iff n \geqslant 7\frac{\ln(10)}{\ln(3)} \text{ avec } \ln(3) > \ln(1) > 0!$$

Sans calculatrice, $\ln(10) > \ln(\mathrm{e}^2) = 2$ et $\ln(3) \simeq \ln(e) = 1$. On prendra pour n un peu plus que 2×7 soit $n = 15$.

Exercice 4 : On considère le polynôme $\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{x} + 30\,\mathrm{e}^{-x} = 17$.

1. Il suffit de factoriser. En remarquant que 2 est racine, on a successivement :
$$\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x-2)(2x^2 + x - 15)$$
On remarque encore que -3 est racine :
$$\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x-2)(2x^2 + x - 15) = (x-2)(x+3)(2x-5).$$
Donc, $\mathcal{S} = \left\{2, -3, \dfrac{5}{2}\right\}$.
2. En multipliant les deux membres de l'équation par $\mathrm{e}^x \neq 0$, on reconnait $\mathrm{P}\left(\mathrm{e}^x\right) = 0$.

Les seules solutions restantes, par injectivité de exp, sont $\ln(2)$ et $\ln(5) - \ln(2)$.

Proposition 7 (Limites aux bornes) :

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

— $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

En particulier, l'axe des ordonnées est *asymptote* à la courbe de ln en 0^+ .

Théorème 8 :
La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 9 (Croissance comparée) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$.

Exemple 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

Proposition 10 (Tangentes) :

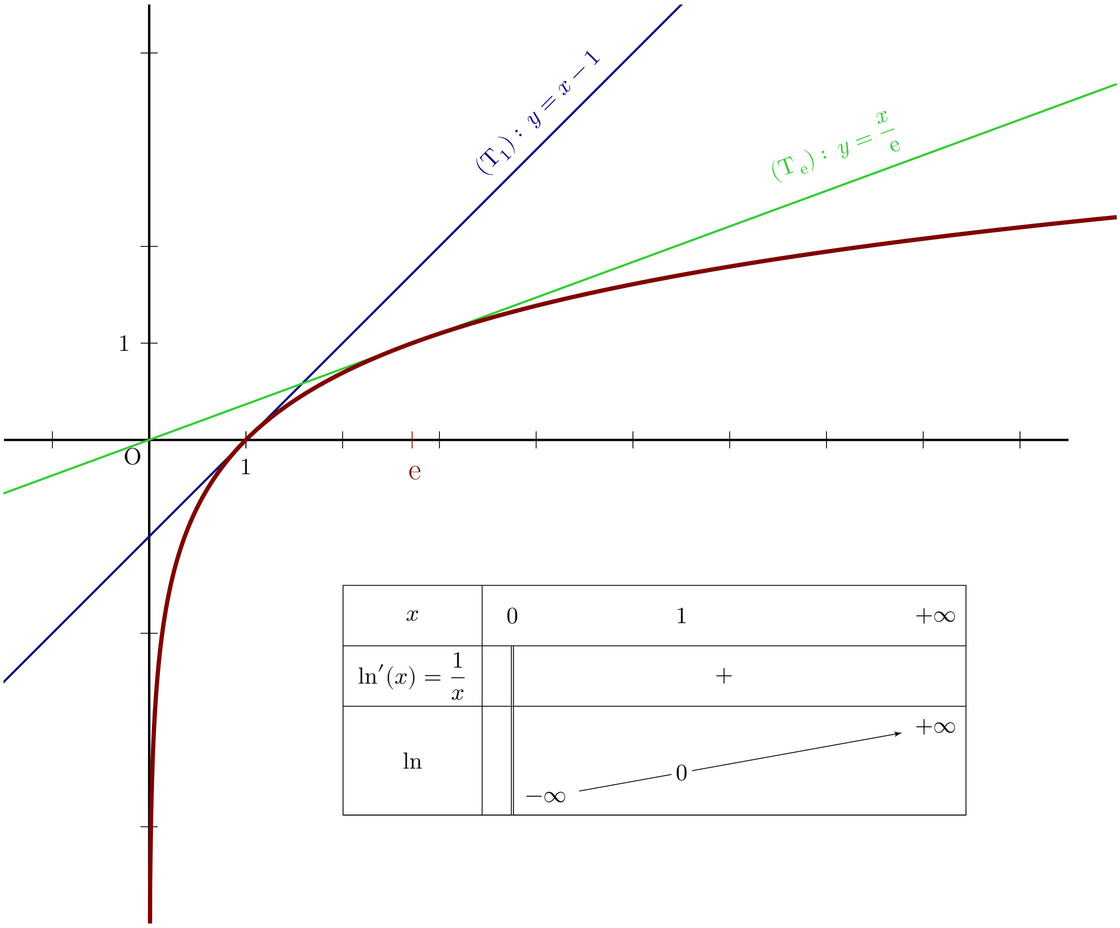
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
2. $\forall\, x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$.

Fonctions de référence

La courbe représentative de ln admet pour tangente :

— en 1, la droite d'équation (T_1) : $y = x - 1$.

— en e, la droite d'équation (T_e) : $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} x$.



x	0 1 $+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖ $+$
ln	‖ $-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

Figure IV.1 – Courbe représentative de $x \longmapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e.

Fonctions de référence

Compléter :

Rappel 1 : La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 4 (Exponentielle) : On appelle fonction *exponentielle népérienne* la fonction bijection réciproque de ln , notée exp telle que :

$$\begin{aligned} \exp : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \ ]0\,;+\infty[\\ y &\longmapsto x \text{ tel que } \ln(x) = y. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0.} \tag{IV.1}$$

Rapidement, en utilisant la définition d'une fonction réciproque, on obtient :

Théorème 11 :
- L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- $\exp(0) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)(x) = x$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp \circ \ln)(x) = x$.

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \sqrt{5 - e^x}$.

$x \longmapsto 5 - \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives si, et seulement si $x \leqslant \ln(5)$ donc $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;\ln(5)[$.

Théorème 12 (Variations) :
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x). \tag{IV.2}$$

La fonction exp est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\left\{\begin{array}{rrl} & f(0) & = 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, & f'(x) & = f(x) \end{array}\right. \tag{IV.3}$$

Proposition 13 :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :

$$\left(\,\mathrm{e}^{u}\right)' = u' \times \mathrm{e}^{u}.$$

Exercice 2 : Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée de $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)$.

$x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ est définie si, et seulement si $x \neq 0$ et du signe de son dénominateur.

Donc $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$.

Sur cet intervalle $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et à valeurs strictement positives donc f est dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \frac{\dfrac{-4\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}} = -\frac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{2x}-1\right)}.$$

Commentaires : *Vous venez de montrer que* $\left(\ln\left(\mathrm{th}\,(x)\right)\right)' = \dfrac{2}{\mathrm{sh}\,(2x)}$.

Proposition 14 (Propriétés algébriques) :

$$\exp(1) = \mathrm{e} \simeq 2,71828182845904523536028747135266249775724$$

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$.

1. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
2. $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
3. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{Q}$, $\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$.

Exercice 3 : On considère le polynôme $\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(17x-30)$. On pensera au domaine de définition !

1. Il suffit de factoriser. En remarquant que 2 est racine, on a successivement :

$$\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x-2)(2x^2 + x - 15)$$

   On remarque encore que -3 est racine :

$$\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x-2)(2x^2 + x - 15) = (x-2)(x+3)(2x-5).$$

   Donc, $\mathcal{S} = \left\{2, -3, \dfrac{5}{2}\right\}$.

2. Cette équation n'est valide que si $x \in \mathcal{D} =]0\,;+\infty[\cap \left]\dfrac{51}{34}\,;+\infty\right[\cap \left]\dfrac{60}{34}\,;+\infty\right[= \left]\dfrac{60}{34}\,;+\infty\right[= \left]\dfrac{30}{17}\,;+\infty\right[$.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathcal{D},\ 2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(17x-30) &\iff \ln\left(x^2(2x-3)\right) = \ln(17x-30)\\ &\iff x^2(2x-3) = 17x - 30\\ &\iff \mathrm{P}(x) = 0.\end{aligned}$$

   Conclusion : $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \left\{\dfrac{34}{17}, \dfrac{85}{34}\right\} = \left\{2, \dfrac{5}{2}\right\}$.

Théorème 15 :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$.

En particulier, l'axe des abscisses est *asymptote* à la courbe en $-\infty$.

Théorème 16 (Croissance comparée) :
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$.

Exemple 1 : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x + \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(x\,\mathrm{e}^x + 1\right) = +\infty$.

Théorème 17 :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

Fonctions de référence

La courbe représentative de exp admet pour tangente :

— en 0, la droite d'équation (T_0) : $y = x + 1$.

— en 1, la droite d'équation (T_1) : $y = \mathrm{e}x$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

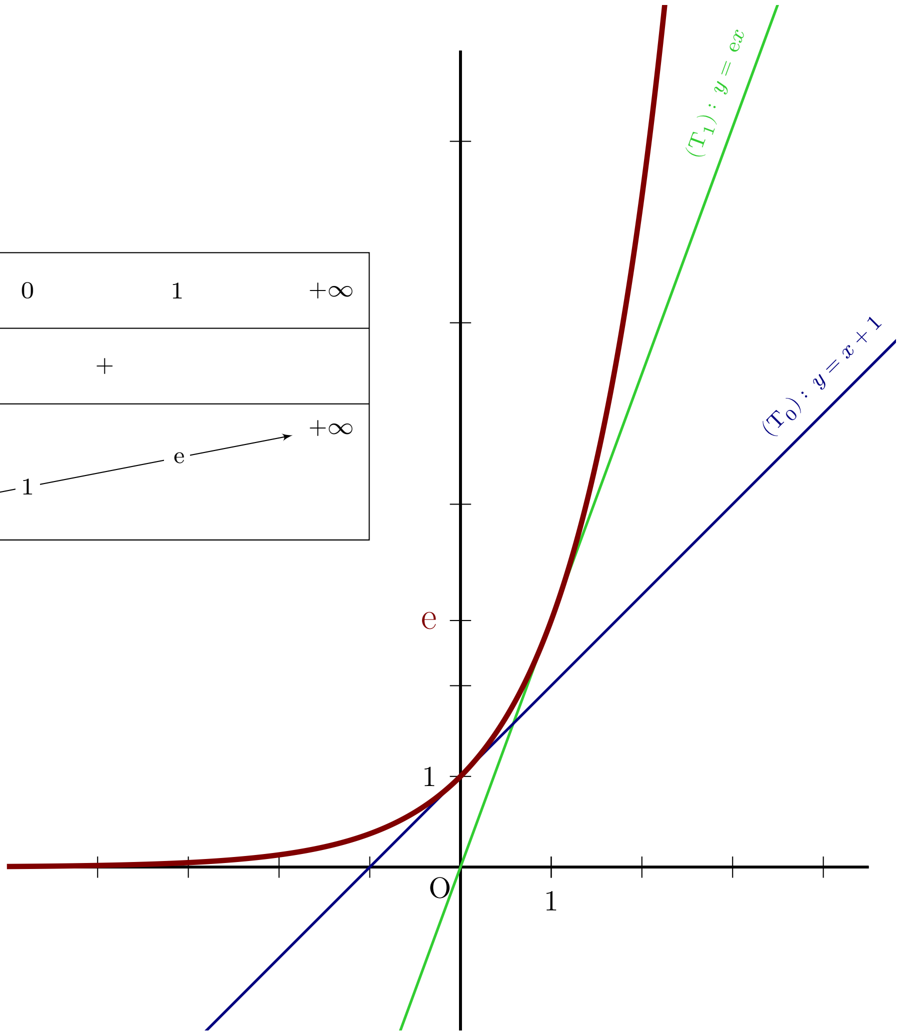


Figure IV.2 – Courbe représentative de $x \longmapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.