Chapitre

VI Sommes et Produits

CONTENU

I/ Sommes et Produits

I.1 Généralités

Définition 1 : Soit I un sous ensemble **fini** non vide d'entiers et $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments d'un ensemble E.

On note :

— $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$, la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ où chaque indice $i \in \mathrm{I}$ apparaît une et une seule fois.

— $\displaystyle\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i$, le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ où chaque indice $i \in \mathrm{I}$ apparaît une et une seule fois.

Par convention, lorsque $\mathrm{I} = \varnothing$, $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i = 1$.

Notations : Dans le cas où $\mathrm{I} = [\![m\,;n]\!]$ avec $m \leqslant n$, on utilisera la notation plus commode :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times a_n.$$

Somme et produit de $(n - m + \boxed{1})$ termes ou facteurs.

Remarques :

— L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Exemple 1 : L'indice n'a aucune signification particulière en dehors de la somme ou du produit.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{❀=m}^{n} a_{❀} = \prod_{j\in[\![m;n]\!]} a_j.$$

— Dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}$, les nombres m et n représentent les bornes et il est implicite que $m \leqslant n$. Dans le cas contraire, $[\![m\,;n]\!] = \varnothing$ et donc $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$.

— Dans la notation $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$, il est aussi implicite que l'indice k augmente de 1 lorsque l'on passe d'un terme au suivant (idem pour le produit).

Par exemple, la somme des entiers impairs de 1 à 15 ne s'écrit pas $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} k$, qui correspond à la somme de tous les entiers de 1 à 15, mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} (2k+1)$.

Exemples 2 :

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$.

— $\displaystyle\sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}$,

mais $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \ldots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}$.

— $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{\text{n-m+1 fois}} = (n - m + \boxed{1})\alpha$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \alpha = \alpha^{n-m+\boxed{1}}$.

— Un petit dernier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k = \mathrm{e}^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)}$.

ATTENTION

Ne pas confondre :

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k+1$. Les parenthèses font toute la différence.

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2^k}$, somme de n termes avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} 2^k$, somme de 2^n termes.

Exercice 1 : Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{7}(k+2)$.
2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{4}(j^2-2)$.
3. $\displaystyle\prod_{i=3}^{7}\frac{i-1}{i+1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1$.
6. $\displaystyle\sum_{p=1}^{2024}(-1)^p$.
7. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}1$.
8. $\displaystyle\prod_{i=6}^{6}i^3$.
9. $\displaystyle\sum_{k=103}^{103}a_k$.

Exercice 2 : Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ.

1. $\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln 10$
2. $1000+1010+1020+\cdots+1540$
3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$
4. $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$
5. $1-2+3-4+5-6+\cdots+1001$
6. $2+4+6+8+\cdots+1024$
7. $5+7+9+11+\cdots+501$
8. $5-7+9-11+\cdots+501$

Exemples 3 (Bis) : On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

— On appelle $\mathbb{U}_n=\left\{\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}},\ k\in[\![0\,;n-1]\!]\right\}$, l'ensemble des *racines n-ièmes de l'unité*.

La somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ s'écrivent :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\qquad\text{et}\qquad\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}.$$

— Si $\mathrm{G}=\{(i\,;j)\in\mathbb{N}^2\,/\,i+j=5\}=\{(0\,;5),(1\,;4),(2\,;3),(3\,;2),(4\,;1),(5\,;0)\}$ alors

$$\sum_{(i;j)\in\mathrm{G}}\frac{i}{i+2j}=\frac{0}{10}+\frac{1}{9}+\frac{2}{8}+\frac{3}{7}+\frac{4}{6}+\frac{5}{5}.$$

— $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{E}}1=|\mathrm{E}|$, autant de 1 que d'éléments dans E.

I.2 Premières propriétés

Proposition 1 (Relation de Chasles) :
Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i\in\mathrm{I}\cup\mathrm{J}}a_i=\sum_{i\in\mathrm{I}}a_i+\sum_{i\in\mathrm{J}}a_i\qquad\text{et}\qquad\prod_{i\in\mathrm{I}\cup\mathrm{J}}^{n}a_i=\prod_{i\in\mathrm{I}}a_i\times\prod_{i\in\mathrm{J}}a_i.$$

En particulier si $m \in [\![1\,;n]\!]$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i.$$

En particulier, pour tout $a \in \mathrm{E}$, $\sum_{i\in \mathrm{I}} a = a \times |\mathrm{I}|$.

Proposition 2 (Linéarité et multiplicativité) :
Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers, $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$, $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ deux familles d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $|\mathrm{I}|$ est le nombre d'éléments de I.

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} (\lambda a_i + b_i) = \lambda \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\right) + \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} b_i\right). \qquad \text{(Linéarité de la somme)}$$

$$\prod_{i\in\mathrm{I}} (\lambda a_i b_i) = \lambda^{|\mathrm{I}|} \left(\prod_{i\in\mathrm{I}} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in\mathrm{I}} b_i\right). \qquad \text{(Multiplicativité du produit)}$$

En particulier, $\prod_{i=p}^{n} (\lambda a_i) = \lambda^{n-p+1} \prod_{i=p}^{n} a_i$.

ATTENTION

En général et même presque toujours, on n'a pas :

$$\cancel{\sum_{i=p}^{n} (a_i \times b_i) = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=p}^{n} (b_i)\right)} \quad \text{et} \quad \cancel{\prod_{i=p}^{n} (a_i + b_i) = \left(\prod_{i=p}^{n} a_i\right) + \left(\prod_{i=p}^{n} (b_i)\right)}.$$

La multiplication n'est pas linéaire mais distributive sur l'addition.

ATTENTION

Inégalité triangulaire : $\left|\prod_{i\in\mathrm{I}} a_i\right| = \prod_{i\in\mathrm{I}} |a_i|$ mais $\left|\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\right| \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} |a_i|$.

ATTENTION

Si l'union $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$ n'est pas nécessairement disjointe, on retrouve, comme pour les cardinaux, probabilités et autres statistiques :

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{i\in\mathrm{I}_1} a_i + \sum_{i\in\mathrm{I}_2} a_i - \sum_{i\in\mathrm{I}_1\cap\mathrm{I}_2} a_i.$$

I.3 Factorielle

Définition 2 (Factorielle) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *factorielle* n, noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

- $1! = 1$
- $2! = 2$
- $3! = 6$
- $4! = 24$
- $5! = 120$
- ...

ATTENTION — Ne pas confondre avec $\prod_{k=1}^{n} n = n^n$.

Proposition 3 :
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

ATTENTION — La factorielle a priorité sur toutes les opérations.
Ainsi, $n + 1! \neq (n+1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!$.

Exercice 3 : Simplifier :

1. $\dfrac{8!}{6!}$
2. $\dfrac{11!}{9!2!}$
3. $\dfrac{13! - 12!}{12!}$
4. $\dfrac{4}{12!} - \dfrac{4}{11!} + \dfrac{4}{10!}$

II/ Méthodes de calculs de sommes et de produits

II.1 Somme et produits télescopiques

Lorsque l'expression à sommer est de la forme $u_{k+1} - u_k$, les termes s'éliminent alors deux à deux et il ne reste alors que le premier et le dernier terme :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.} \tag{VI.1}$$

Ce principe s'applique également aux produits de la forme $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}}.$$

Exercice 4 : Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

II.2 Changement d'indice

Il arrive qu'on ait besoin de réindexer une somme (changer l'indice).

Les trois remarques simples suivantes amènent à des techniques pour simplifier des sommes :

1. Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j+1$ avec j de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

Exemple 5 : Si on considère $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{100} a_{k-1}$, on a $\mathrm{S} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{98} + a_{99}$.

On constate qu'on peut aussi noter $\mathrm{S} = \sum_{i=0}^{99} a_i$, et on a :

$$\sum_{k=1}^{100} a_{k-1} = \sum_{i=0}^{99} a_i.$$

Méthode 1 (Changement d'indice) :
Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

1. On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
2. Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice.
3. On modifie les bornes de la somme en fonction du nouvel indice.

On prendra garde aussi à ni ajouter ni oublier des termes de l'expression par ce nouvel indiçage.

Exercice 5 : Écrire les sommes suivantes sans utiliser le symbole Σ puis proposer une autre écriture, avec le symbole Σ. *On ne demande pas de calculer ces sommes !*

1. $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$
2. $\sum_{k=3}^{n-2} \ln(k+2)$
3. $\sum_{k=5}^{3n} \ln(k-1)$
4. $\sum_{k=0}^{n} \ln n$

2. Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}.$$

Exercice 6 : À l'aide du changement d'indice $j = n-k$, retrouver la valeur de la somme $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

3. Regrouper une somme finie selon les indices de même parité donne le même résultat :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n} = (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}) + (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$$
$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{2k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\right).$$

Proposition 4 (Changements d'indice) :
Soit $(a_i)_{m \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : en posant $j = i + \ell$ ou $i = j - \ell$,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$

Inversion de compteur : en posant $j = n + m - i$,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_{n+m-j}.$$

Décomposition indice pairs/impairs : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}$

Exemple 6 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$

Exercice 7 : Calculer grâce à un changement d'indice :

1. $\displaystyle\sum_{k=5}^{95} \frac{1}{6^k}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1515}^{2013} i$
3. $\displaystyle\sum_{j=-2}^{40} (6j+4)$
4. $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n} p$

II.3 Sommes de référence

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :
Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathrm{S}_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \mathrm{S}_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\mathrm{S}_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

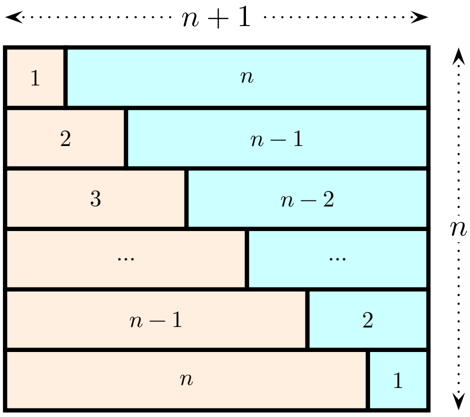

Figure VI.1 – $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

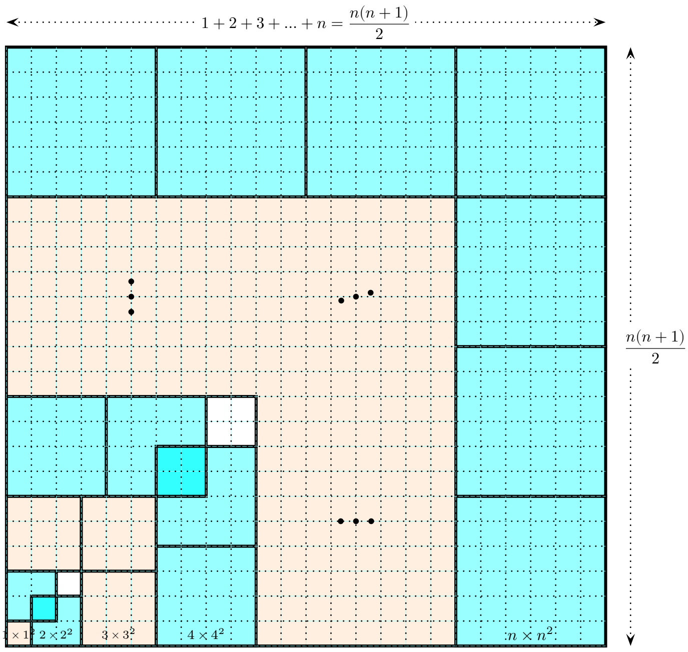

Figure VI.2 – $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Théorème 6 (Somme d'une progression arithmétique ou géométrique) :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \overbrace{\frac{u_m+u_n}{2}}^{\text{Moyenne des extrêmes}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}.$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}, & \text{si} \quad q=1. \\ \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \dfrac{1-q^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de termes}}}}{1-q}, & \text{si} \quad q\neq 1. \end{cases}$$

Exemple 7 : À l'aide de 1, on généralise très facilement $\sum_{k=1}^{n} k$ pour $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$

Exemple 8 : Si $\theta \neq 0$, $1 + e^{\theta} + e^{2\theta} + ... + e^{n\theta} = \dfrac{1-e^{(n+1)\theta}}{1-e^{\theta}} = \dfrac{\operatorname{sh}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{\frac{n\theta}{2}}$.

Exemple 9 : À l'aide de 2, on obtient en particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad z^n - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right).$$

On peut généraliser cette relation.

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\ &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Exemple 10 : On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ a^{2p+1} + b^{2p+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^{2p-k} b^k \\ &= (a+b)\left(a^{2p} - a^{2p-1}b + a^{2p-2}b^2 + ... - ab^{2p-1} + b^{2p}\right). \end{aligned}$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \qquad x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) \qquad x^5 + 1 = (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Remarque : Si P est une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe Q fonction polynomiale de degré $n-1$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{P}(z) - \mathrm{P}(\lambda) = (z-\lambda)\mathrm{Q}(z).$$

Exercice 8 : Montrer que $2^{3n} - 1$ est multiple de 7.

II.4 Relation Produit-somme

Théorème 8 :
Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on a alors :

$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k) \quad \text{et} \quad \exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{a_k}.$$

Remarque : Pour la deuxième formule, il est inutile de supposer les a_i non nuls ou positifs.

III/ Coefficients binomiaux et formule du binôme

III.1 Coefficients binomiaux

Définition 3 (Coefficients binomiaux) : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n, noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Remarque : Considérer $k \in \mathbb{Z}$ n'amène pas à se demander ce que pourrait signifier $k!$ avec k négatif mais est une convention voulu par le programme afin d'éviter des disjonctions de cas inconséquentes.

Exemples 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Pour $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et pour $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : Pour les calculs des $\binom{n}{k}$, on utilisera souvent la forme « simplifiée » :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.}$$

On peut noter que le numérateur et le dénominateur comptent autant de facteurs.

Exercice 9 : Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}$ et $\dfrac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p+1}}$.

Proposition 9 :
Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

1. **Symétrie :** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
3. **Formule de Pascal :** $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.}$
4. **Intégralité :** $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

L'assertion (1) de la proposition (9) permet de compléter les premières valeurs de l' exemple (11) :

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En particulier, la deuxième formule permet de calculer $\binom{n}{k}$ de proche en proche. Les résultats sont le tableau ci-dessous appelé *triangle de Pascal*.

	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$
$\vdots$				
n		$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	
$n+1$			$\binom{n+1}{k+1}$	
$\vdots$				

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	**1**	**1**				
2	1	**2**	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	**6**	**4**	1	
5	1	5	10	**10**	5	1

Symétrie

Figure VI.3 – Triangle de Pascal

III.2 Binôme de Newton

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :
Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif [1] et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{VI.2}$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Remarque : Il est parfois plus avantageux d'écrire cette formule en inversant les rôles de a et b sous la forme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

ATTENTION Il est très important que l'ensemble contenant a et b soit commutatif pour la loi multiplicative sinon cette formule est fausse. Ceux parmi vous qui ont suivi l'option mathématiques expertes l'année dernière devraient s'en souvenir.

Exemples 12 :

— $$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$$
$$= a^n - na^{n-1}b + \ldots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n.$$

— Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

— Pour $a = -b = 1$, on obtient $0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

[1]. *i.e.* un anneau dont les DEUX lois + et × sont commutatives. Surtout le produit !

— Si $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \underset{\text{Formule du capitaine}}{=} \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \underset{\text{On factorise}}{=} n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$

$$\underset{k \leftarrow k-1}{=} n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \underset{(1+1)^{n-1}}{=} n \times 2^{n-1}.$$

Exemple 13 :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (1+z)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k.$$

Exercice 10 : Développer :

1. $(x-y)^3$
2. $(1+x\sqrt{2})^4$
3. $(2-x)^5$

IV/ Sommes doubles

Définition 4 (Somme sur un rectangle et sur un triangle) : Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E.

On note :

— $\displaystyle\sum_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{ij}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.

— $\displaystyle\prod_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{ij}$ le produit des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.

Si la famille est indexée par des couples $(i\,;j)$ vérifiant une condition du type $i \leqslant j$, $i<j$, $i \geqslant j$, ou $i>j$, on dit que la somme ou le produit est *triangulaire*, et on note :

- $\displaystyle\sum_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \\ i\leqslant j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\sum_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \\ i< j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\prod_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \\ i\leqslant j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\prod_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \\ i\leqslant j}} a_{i,j}$

Exemples 14 :

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{57}{60}$
- $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{19}{20}$
- $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{360}$
- $\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

Notations : Lorsque $\mathrm{I} = [\![m\,;n]\!]$ et $\mathrm{J} = [\![p\,;q]\!]$, la somme de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ se note :

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{m\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} \;\text{ si } \mathrm{I}=\mathrm{J}=[\![m\,;n]\!].$$

ATTENTION Dans la dernière écriture, l'expression $m \leqslant i, j \leqslant n$ n'est permise que si i et j sont deux variables indépendantes.

IV.1 Permutation des symboles Σ

Théorème 11 (Somme double indexée par un rectangle) :
Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $[\![m\,;n]\!] \times [\![p\,;q]\!]$.

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Dans le cas d'un rectangle, les sommes permutent donc sans contraintes.

Théorème 12 (Somme double indexée par un triangle) :
Soient m et n des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par le triangle $\{\,(i\,;j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \,/\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

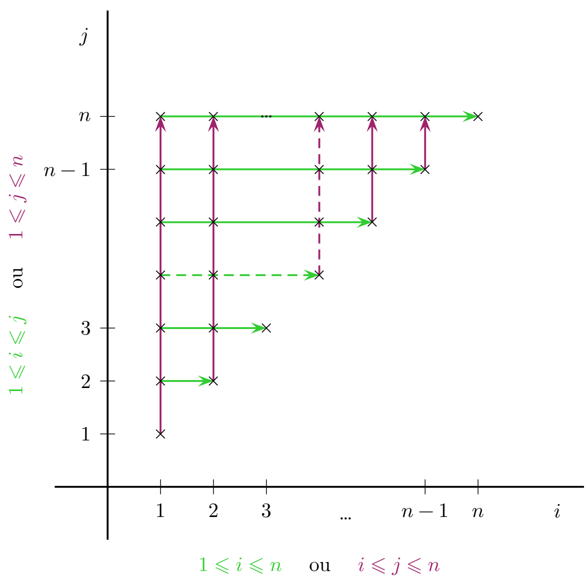

Figure VI.4 – Sommation par tranches

Si l'on somme sans prendre la diagonale *i.e.* les termes a_{ii}, $i \in [\![1\,;n]\!]$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{m\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m+1}^{n}\sum_{i=m}^{j-1} a_{ij}.}$$

Exercice 11 : Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

Proposition 13 (Produit de deux sommes) :
Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ deux familles d'éléments de E.

— $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ib_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_ib_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_ib_j.$

— $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j.$ (Carrée d'une somme)

Exemple 15 : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

IV.2 Permutation des symboles Π

Théorème 14 :
Soit $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par un rectangle $[\![m\,;n]\!]\times[\![p\,;q]\!]$ ou un triangle $\{\,(i\,;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}\,/\,m\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$.

On a :

Sur un rectangle : $\displaystyle\prod_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q} a_{ij} = \prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n} a_{ij}.$

Sur un triangle : $\displaystyle\prod_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=i}^{n} a_{ij} = \prod_{j=m}^{n}\prod_{i=m}^{j} a_{ij}.$

(sans la diagonale) $\displaystyle\prod_{m\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \prod_{j=m+1}^{n}\prod_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$

Exemple 16 :

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(ij^2) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(ij^2) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\prod_{j=1}^{n} j^2\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2\right) = \prod_{i=1}^{n}(i^n n!^2) \\ &= (n!)^{2n}\times\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n = (n!)^{2n}\times(n!)^n = (n!)^{3n}.\end{aligned}$$

Exercice 12 : Est-il vrai que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} z_{ij}$?