

Sommes et Produits

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 6



- 1 Sommes et Produits
- 2 Méthodes de calculs de sommes et de produits
- 3 Coefficients binomiaux et formule du binôme
- 4 Sommes doubles



Dans ce chapitre, pour deux entiers m et n tels que $m \leq n$, on notera $\llbracket m ; n \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre m et n :

$$\llbracket m ; n \rrbracket = \{m, m + 1, \dots, n - 1, n\}.$$

C'est un ensemble fini à $(n - m + \boxed{1})$ éléments !



I. Sommes et Produits

1 Sommes et Produits

- Généralités
- Premières propriétés
- Factorielle

2 Méthodes de calculs de sommes et de produits

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

4 Sommes doubles



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Définition I :

Soit I un sous ensemble **fini** non vide d'entiers et $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E .

On note :

- $\sum_{i \in I} a_i$, la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$ où chaque indice $i \in I$ apparaît une et une seule fois.
- $\prod_{i \in I} a_i$, le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$ où chaque indice $i \in I$ apparaît une et une seule fois.

Par convention, lorsque $I = \emptyset$, $\sum_{i \in I} a_i = 0$ et $\prod_{i \in I} a_i = 1$.



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Notations : Dans le cas où $I = \llbracket m ; n \rrbracket$ avec $m \leq n$, on utilisera la notation plus commode :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n.$$

Somme et produit de $(n - m + \boxed{1})$ termes ou facteurs.



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Remarques :

- L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Remarques :

- L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Exemple 1 :

L'indice n 'a aucune signification particulière en dehors de la somme ou du produit.

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=m}^n a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{\star=m}^n a_{\star} = \prod_{j \in \llbracket m;n \rrbracket} a_j.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Remarques :

- L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Exemple 1 :

L'indice n'a aucune signification particulière en dehors de la somme ou du produit.

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=m}^n a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{\star=m}^n a_{\star} = \prod_{j \in \llbracket m; n \rrbracket} a_j.$$

- Dans l'écriture $\sum_{k=m}^n$, les nombres m et n représentent les bornes et il est implicite que $m \leq n$. Dans le cas contraire, $\llbracket m; n \rrbracket = \emptyset$ et donc $\sum_{k=m}^n a_k = 0$
et $\prod_{k=m}^n a_k = 1$.



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Remarques :

- Dans la notation $\sum_{k=m}^n a_k$, il est aussi implicite que l'indice k augmente de 1 lorsque l'on passe d'un terme au suivant (idem pour le produit).

Par exemple, la somme des entiers impairs de 1 à 15 ne s'écrit pas $\sum_{k=1}^{15} k$,

qui correspond à la somme de tous les entiers de 1 à 15, mais $\sum_{k=0}^7 (2k + 1)$.



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exemples 2 :

$$\blacksquare \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exemples 2 :

$$\blacksquare \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

$$\blacksquare \sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n},$$

$$\text{mais } \sum_{p=1}^n \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exemples 2 :

$$\blacksquare \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

$$\blacksquare \sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n},$$

$$\text{mais } \sum_{p=1}^n \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}.$$

$$\blacksquare \forall \alpha \in \mathbb{K}, \sum_{k=m}^n \alpha = \underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_{n-m+1 \text{ fois}} = (n-m+1)\alpha \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^n \alpha = \alpha^{n-m+1}.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exemples 2 :

$$\blacksquare \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

$$\blacksquare \sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n},$$

$$\text{mais } \sum_{p=1}^n \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}.$$

$$\blacksquare \forall \alpha \in \mathbb{K}, \sum_{k=m}^n \alpha = \underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_{n-m+1 \text{ fois}} = (n-m+1)\alpha \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^n \alpha = \alpha^{n-m+1}.$$

$$\blacksquare \text{Un petit dernier : } \prod_{k=1}^n e^k = e^{\left(\sum_{k=1}^n k\right)}.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

ATTENTION

Ne pas confondre :

■ $\sum_{k=1}^n (k + 1) = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n$ avec $\sum_{k=1}^n k + 1$. Les parenthèses font toute la différence.

■ $\sum_{k=1}^n 2^{2^k}$, somme de n termes avec $\sum_{k=1}^{2^n} 2^k$, somme de 2^n termes.



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 1 :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k + 2).$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 1 :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k + 2).$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 1 :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k + 2).$$

$$\textcircled{3} \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 1 :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k + 2).$$

$$\textcircled{3} \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^{10} k.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice I :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k+2).$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$

$$\textcircled{3} \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^{10} k.$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n 1.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice I :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k+2).$$

$$\textcircled{3} \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$\textcircled{6} \sum_{p=1}^{2024} (-1)^p.$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^{10} k.$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n 1.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice I :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k+2).$$

$$\textcircled{3} \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$\textcircled{6} \sum_{p=1}^{2024} (-1)^p.$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^{10} k.$$

$$\textcircled{7} \sum_{k=n}^{2n} 1.$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n 1.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice I :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k+2).$$

$$\textcircled{3} \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$\textcircled{6} \sum_{p=1}^{2024} (-1)^p.$$

$$\textcircled{8} \prod_{i=6}^6 i^3.$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^{10} k.$$

$$\textcircled{7} \sum_{k=n}^{2n} 1.$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n 1.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice I :

Calculer les sommes et produits suivantes :

$$\textcircled{1} \sum_{k=3}^7 (k+2).$$

$$\textcircled{3} \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$\textcircled{6} \sum_{p=1}^{2024} (-1)^p.$$

$$\textcircled{8} \prod_{i=6}^6 i^3.$$

$$\textcircled{2} \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^{10} k.$$

$$\textcircled{7} \sum_{k=n}^{2n} 1.$$

$$\textcircled{9} \sum_{k=103}^{103} a_k.$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n 1.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

① $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

- ① $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$
- ② $1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

① $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$

② $1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$

③ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

① $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$

② $1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$

③ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

④ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

❶ $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$

❷ $1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$

❸ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

❹ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

❺ $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1001$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

① $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$

② $1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$

③ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

④ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

⑤ $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1001$

⑥ $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 1024$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

① $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$

② $1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$

③ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

④ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

⑤ $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1001$

⑥ $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 1024$

⑦ $5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 501$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

① $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$

② $1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$

③ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

④ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

⑤ $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1001$

⑥ $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 1024$

⑦ $5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 501$

⑧ $5 - 7 + 9 - 11 + \dots + 501$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exemples 3 (Bis) :

On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

- On appelle $\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$, l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

La somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de \mathcal{U}_n s'écrivent :

$$\sum_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exemples 3 (Bis) :

On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

- On appelle $\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$, l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

La somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de \mathcal{U}_n s'écrivent :

$$\sum_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

- Si $G = \{ (i; j) \in \mathbb{N}^2 / i + j = 5 \} = \{ (0; 5), (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0) \}$ alors

$$\sum_{(i; j) \in G} \frac{i}{i+2j} = \frac{0}{10} + \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \frac{4}{6} + \frac{5}{5}.$$



I. Sommes et Produits

1. Généralités

Exemples 3 (Bis) :

On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

- On appelle $\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$, l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

La somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de \mathcal{U}_n s'écrivent :

$$\sum_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

- Si $G = \{ (i; j) \in \mathbb{N}^2 / i + j = 5 \} = \{ (0; 5), (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0) \}$ alors

$$\sum_{(i; j) \in G} \frac{i}{i+2j} = \frac{0}{10} + \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \frac{4}{6} + \frac{5}{5}.$$

- $\sum_{i \in E} 1 = |E|$, autant de 1 que d'éléments dans E.



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

Proposition I (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I \cup J}^n a_i = \prod_{i \in I} a_i \times \prod_{i \in J} a_i.$$



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

Proposition I (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I \cup J} a_i = \prod_{i \in I} a_i \times \prod_{i \in J} a_i.$$

En particulier si $m \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ alors

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^m a_i \times \prod_{i=m+1}^n a_i.$$



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

Proposition 1 (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I \cup J} a_i = \prod_{i \in I} a_i \times \prod_{i \in J} a_i.$$

En particulier si $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ alors

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^m a_i \times \prod_{i=m+1}^n a_i.$$

En particulier, pour tout $a \in E$, $\sum_{i \in I} a = a \times |I|$.



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

Proposition I (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I \cup J} a_i = \prod_{i \in I} a_i \times \prod_{i \in J} a_i.$$

En particulier si $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ alors

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^m a_i \times \prod_{i=m+1}^n a_i.$$

Elle se généralise aisément à une réunion $I_1 \sqcup I_2 \sqcup \dots \sqcup I_n$ d'ensembles **deux à deux disjoints** ou à toute **partition** de I :

$$\sum_{i \in I_1 \sqcup I_2 \sqcup \dots \sqcup I_n} a_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right).$$



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

Proposition 2 (Linéarité et multiplicativité) :

Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $|I|$ est le nombre d'éléments de I .

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + b_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I} a_i \right) + \left(\sum_{i \in I} b_i \right). \quad (\text{Linéarité de la somme})$$



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

Proposition 2 (Linéarité et multiplicativité) :

Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $|I|$ est le nombre d'éléments de I .

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + b_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I} a_i \right) + \left(\sum_{i \in I} b_i \right). \quad (\text{Linéarité de la somme})$$

$$\prod_{i \in I} (\lambda a_i b_i) = \lambda^{|I|} \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \times \left(\prod_{i \in I} b_i \right). \quad (\text{Multiplicativité du produit})$$



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

Proposition 2 (Linéarité et multiplicativité) :

Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $|I|$ est le nombre d'éléments de I .

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + b_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I} a_i \right) + \left(\sum_{i \in I} b_i \right). \quad (\text{Linéarité de la somme})$$

$$\prod_{i \in I} (\lambda a_i b_i) = \lambda^{|I|} \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \times \left(\prod_{i \in I} b_i \right). \quad (\text{Multiplicativité du produit})$$

En particulier,
$$\prod_{i=p}^n (\lambda a_i) = \lambda^{n-p+1} \prod_{i=p}^n a_i.$$



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

En général et même presque toujours, on n'a pas :

~~$$\sum_{i=p}^n (a_i \times b_i) = \left(\sum_{i=p}^n a_i \right) \times \left(\sum_{i=p}^n b_i \right)$$~~

et

~~$$\prod_{i=p}^n (a_i + b_i) = \left(\prod_{i=p}^n a_i \right) + \left(\prod_{i=p}^n b_i \right)$$~~

La multiplication n'est pas linéaire mais distributive sur l'addition.

ATTENTION



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

ATTENTION

Inégalité triangulaire : $\left| \prod_{i \in I} a_i \right| = \prod_{i \in I} |a_i|$ mais

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|.$$



I. Sommes et Produits

2. Premières propriétés

ATTENTION

Inégalité triangulaire : $\left| \prod_{i \in I} a_i \right| = \prod_{i \in I} |a_i|$ mais

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|.$$

ATTENTION

Si l'union $I = I_1 \cup I_2$ n'est pas nécessairement disjointe, on retrouve, comme pour les cardinaux, probabilités et autres statistiques :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i - \sum_{i \in I_1 \cap I_2} a_i.$$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

■ $1! = 1$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

■ $1! = 1$

■ $2! = 2$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

■ $1! = 1$

■ $2! = 2$

■ $3! = 6$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

■ $1! = 1$

■ $2! = 2$

■ $3! = 6$

■ $4! = 24$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

■ $1! = 1$

■ $2! = 2$

■ $3! = 6$

■ $4! = 24$

■ $5! = 120$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

■ $1! = 1$

■ $2! = 2$

■ $3! = 6$

■ $4! = 24$

■ $5! = 120$

ATTENTION

Ne pas confondre avec $\prod_{k=1}^n n = n^n$.



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.

ATTENTION

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n + 1! \neq (n + 1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et
 $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!.$



I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.

ATTENTION

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n + 1! \neq (n + 1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et
 $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!.$

Exercice 3 :

Simplifier :

1 $\frac{8!}{6!}$

I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.

ATTENTION

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n + 1! \neq (n + 1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et
 $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!.$

Exercice 3 :

Simplifier :

① $\frac{8!}{6!}$

② $\frac{11!}{9!2!}$

I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.

ATTENTION

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n + 1! \neq (n + 1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et
 $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!.$

Exercice 3 :

Simplifier :

① $\frac{8!}{6!}$

② $\frac{11!}{9!2!}$

③ $\frac{13! - 12!}{12!}$

I. Sommes et Produits

3. Factorielle

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.

ATTENTION

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n + 1! \neq (n + 1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et
 $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!.$

Exercice 3 :

Simplifier :

① $\frac{8!}{6!}$

② $\frac{11!}{9!2!}$

③ $\frac{13! - 12!}{12!}$

④ $\frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!}$

II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

1 Sommes et Produits

2 Méthodes de calculs de sommes et de produits

- Somme et produits télescopiques
- Changement d'indice
- Sommes de référence
- Relation Produit-somme

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

4 Sommes doubles



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

1. Somme et produits télescopiques

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

(1)



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

1. Somme et produits télescopiques

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m. \quad (1)$$

Ce principe s'applique également aux produits de la forme $\frac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\prod_{k=m}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

1. Somme et produits télescopiques

Exercice 4 :

Calculer les sommes et les produits suivants :

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right).$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

1. Somme et produits télescopiques

Exercice 4 :

Calculer les sommes et les produits suivants :

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right).$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

1. Somme et produits télescopiques

Exercice 4 :

Calculer les sommes et les produits suivants :

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right).$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}.$$

$$\textcircled{3} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right).$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Il arrive qu'on ait besoin de réindexer une somme (changer l'indice).

Les trois remarques simples suivantes amènent à des techniques pour simplifier des sommes :



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

- ④ Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j + 1$ avec j de 0 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

Exemple 5 :

Si on considère $S = \sum_{k=1}^{100} a_{k-1}$, on a $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{98} + a_{99}$.

On constate qu'on peut aussi noter $S = \sum_{i=0}^{99} a_i$, et on a :

$$\sum_{k=1}^{100} a_{k-1} = \sum_{i=0}^{99} a_i.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Méthode I :

Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

- 1 On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Méthode 1 :

Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

- 1 On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
- 2 Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice.



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Méthode I :

Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

- 1 On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
- 2 Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice.
- 3 On modifie les bornes de la somme en fonction du nouvel indice.



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Méthode I :

Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

- 1 On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
- 2 Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice.
- 3 On modifie les bornes de la somme en fonction du nouvel indice.

On prendra garde aussi à ne pas ajouter ni oublier des termes de l'expression par ce nouvel indexage.



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Exercice 5 :

Écrire les sommes suivantes sans utiliser le symbole Σ puis proposer une autre écriture, avec le symbole Σ . *On ne demande pas de calculer ces sommes !*

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \ln(k+1)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=3}^{n-2} \ln(k+2)$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=5}^{3n} \ln(k-1)$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=0}^n \ln n$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

- ④ Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j + 1$ avec j de 0 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

- ① Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j + 1$ avec j de 0 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

- ② Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

- ① Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j + 1$ avec j de 0 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

- ② Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

- ❶ Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j + 1$ avec j de 0 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

- ❷ Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$

Exercice 6 :

À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n k.$$

II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

- ① Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j + 1$ avec j de 0 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

- ② Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$

- ③ Regrouper une somme finie selon les indices de même parité donne le même résultat :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n} = (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}) + (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$$

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \left(\sum_{k=0}^n a_{2k} \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} \right).$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Remarque :

(Hors-Programme)

De manière un peu plus formelle, une numérotation des éléments d'un ensemble I consiste en une bijection $\varphi : \llbracket 1 ; n \rrbracket \mapsto I$.

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=1}^n a_{\varphi(i)}.$$

L'indexation ensembliste n'est qu'une commodité permettant parfois d'avoir à expliciter une bijection.

Soient I et J deux ensembles et $\varphi : I \mapsto J$ une bijection. Alors, pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$, on a :

$$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{i \in I} a_{\varphi(i)} \quad \text{et} \quad \prod_{j \in J} a_j = \prod_{i \in I} a_{\varphi(i)}.$$

En appliquant ce résultat à la bijection réciproque φ^{-1} , on a alors aussi, pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\varphi^{-1}(j)} \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i = \prod_{j \in J} a_{\varphi^{-1}(j)}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Le cas le plus fréquent est celui où la bijection est donnée par une translation ou une symétrie sur des ensembles d'entiers consécutifs :

Proposition 4 (Changements d'indice) :

Soit $(a_i)_{m \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : en posant $j = i + \ell$ ou $i = j - \ell$,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Le cas le plus fréquent est celui où la bijection est donnée par une translation ou une symétrie sur des ensembles d'entiers consécutifs :

Proposition 4 (Changements d'indice) :

Soit $(a_i)_{m \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : en posant $j = i + \ell$ ou $i = j - \ell$,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$

Inversion de compteur : en posant $j = n + m - i$,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_{n+m-j} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m}^n a_{n+m-j}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Le cas le plus fréquent est celui où la bijection est donnée par une translation ou une symétrie sur des ensembles d'entiers consécutifs :

Proposition 4 (Changements d'indice) :

Soit $(a_i)_{m \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : en posant $j = i + \ell$ ou $i = j - \ell$,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$

Inversion de compteur : en posant $j = n + m - i$,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_{n+m-j} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m}^n a_{n+m-j}.$$

Décomposition indice pairs/impairs : $\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Exemple 6 :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Exemple 6 :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$$

Exercice 7 :

Calculer grâce à un changement d'indice :

$$\textcircled{1} \sum_{k=5}^{95} \frac{1}{6^k}$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Exemple 6 :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$$

Exercice 7 :

Calculer grâce à un changement d'indice :

1 $\sum_{k=5}^{95} \frac{1}{6^k}$

2 $\sum_{i=1515}^{2013} i$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Exemple 6 :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$$

Exercice 7 :

Calculer grâce à un changement d'indice :

① $\sum_{k=5}^{95} \frac{1}{6^k}$

② $\sum_{i=1515}^{2013} i$

③ $\sum_{j=-2}^{40} (6j+4)$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Exemple 6 :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$$

Exercice 7 :

Calculer grâce à un changement d'indice :

❶ $\sum_{k=5}^{95} \frac{1}{6^k}$

❷ $\sum_{i=1515}^{2013} i$

❸ $\sum_{j=-2}^{40} (6j+4)$

❹ $\sum_{p=n}^{2n} p$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\blacksquare S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare S_1(n) &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \blacksquare S_2(n) &= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned}$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\blacksquare S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\blacksquare S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\blacksquare S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

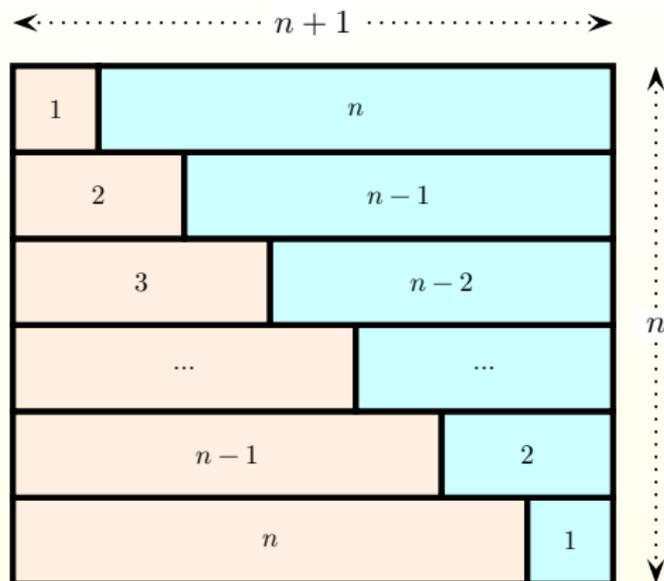


Figure 1 $-\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

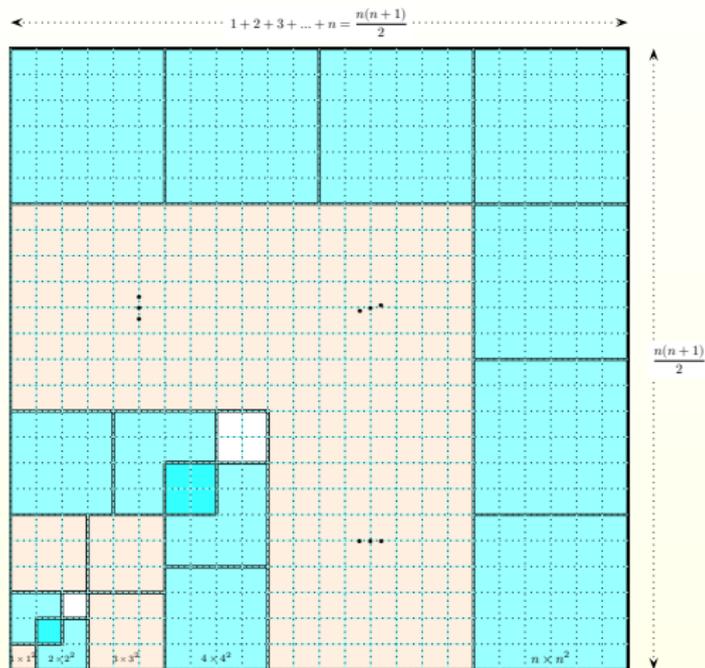


Figure 2 - $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 6 (Somme d'une progression arithmétique ou géométrique) :

④ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \overbrace{\frac{u_m + u_n}{2}}^{\text{Moyenne des extrêmes}} \times \overbrace{(n - m + 1)}^{\text{Nombre de termes}}. \quad (\text{S.A.})$$

II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 6 (Somme d'une progression arithmétique ou géométrique) :

❶ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \overbrace{\frac{u_m + u_n}{2}}^{\text{Moyenne des extrêmes}} \times \overbrace{(n - m + 1)}^{\text{Nombre de termes}}. \quad (\text{S.A.})$$

❷ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \begin{cases} \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \overbrace{(n - m + 1)}^{\text{Nombre de termes}}, & \text{si } q = 1. \\ \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \frac{1 - q^{\overbrace{n - m + 1}^{\text{Nombre de termes}}}}{1 - q}, & \text{si } q \neq 1. \end{cases} \quad (\text{S.G.})$$

II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Exemple 7 :

À l'aide de (S.A), on généralise très facilement $\sum_{k=1}^n k$ pour $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Exemple 7 :

À l'aide de (S.A), on généralise très facilement $\sum_{k=1}^n k$ pour $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$

Exemple 8 :

$$\text{Si } \theta \neq 0, 1 + e^{\theta} + e^{2\theta} + \dots + e^{n\theta} = \frac{1 - e^{(n+1)\theta}}{1 - e^{\theta}} = \frac{\text{sh}\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\text{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{\frac{n\theta}{2}}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Exemple 7 :

À l'aide de (S.A), on généralise très facilement $\sum_{k=1}^n k$ pour $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$

Exemple 8 :

$$\text{Si } \theta \neq 0, 1 + e^\theta + e^{2\theta} + \dots + e^{n\theta} = \frac{1 - e^{(n+1)\theta}}{1 - e^\theta} = \frac{\text{sh}\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\text{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{\frac{n\theta}{2}}.$$

Exemple 9 :

À l'aide de (S.G), on obtient en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}).$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\ &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \end{aligned}$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\ &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \end{aligned}$$

Exemple 10 :

On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}^*, a^{2p+1} + b^{2p+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^{2p-k} b^k \\ &= (a + b)(a^{2p} - a^{2p-1}b + a^{2p-2}b^2 + \dots - ab^{2p-1} + b^{2p}). \end{aligned}$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\ &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \end{aligned}$$

Exemple 10 :

On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans \mathbb{R} :

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \qquad x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\ &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \end{aligned}$$

Exemple 10 :

On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans \mathbb{R} :

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

3. Sommes de référence

Remarque : Si P est une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe Q fonction polynomiale de degré $n - 1$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) - P(\lambda) = (z - \lambda)Q(z).$$

On peut aller plus loin :

Corollaire 1 (Racine et factorisation) :

Soient P une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $P(\lambda) = 0$ *i.e.* λ est une racine de P .
- ② Il existe une fonction polynomiale Q telle que $P(z) = (z - \lambda)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

4. Relation Produit-somme

Théorème 8 :

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a alors :

$$\ln \left(\prod_{k=p}^n a_k \right) = \sum_{k=p}^n \ln(a_k) \quad \text{et} \quad \exp \left(\sum_{k=p}^n a_k \right) = \prod_{k=p}^n e^{a_k}.$$



II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

4. Relation Produit-somme

Théorème 8 :

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a alors :

$$\ln \left(\prod_{k=p}^n a_k \right) = \sum_{k=p}^n \ln(a_k) \quad \text{et} \quad \exp \left(\sum_{k=p}^n a_k \right) = \prod_{k=p}^n e^{a_k}.$$

Remarque : Pour la deuxième formule, il est inutile de supposer les a_i non nuls ou positifs.



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

- 1 Sommes et Produits
- 2 Méthodes de calculs de sommes et de produits
- 3 Coefficients binomiaux et formule du binôme**
 - Coefficients binomiaux
 - Binôme de Newton
- 4 Sommes doubles



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Définition 3 (Coefficients binomiaux) :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n , noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Définition 3 (Coefficients binomiaux) :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n , noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : Considérer $k \in \mathbb{Z}$ n'amène pas à se demander ce que pourrait signifier $k!$ avec k négatif mais est une convention voulu par le programme afin d'éviter des disjonctions de cas inconséquentes.



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Exemples II :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Exemples II :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\text{Pour } n \geq 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \text{ et pour } n \geq 2, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Exemples II :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\text{Pour } n \geq 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \text{ et pour } n \geq 2, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Remarque : Pour les calculs des $\binom{n}{k}$, on utilisera souvent la forme « simplifiée » :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

On peut noter que le numérateur et le dénominateur comptent autant de facteurs.



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Exercice 8 :

Simplifier $\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}$ et $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p+1}}$.



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Proposition 9 :

Soit $(k; n) \in \mathbb{N}^2$

① Symétrie :
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Proposition 9 :

Soit $(k; n) \in \mathbb{N}^2$

❶ **Symétrie :**
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

❷ **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geq 1$,
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Proposition 9 :

Soit $(k; n) \in \mathbb{N}^2$

❶ **Symétrie :**
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

❷ **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geq 1$,
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

❸ **Formule de Pascal :**
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

Proposition 9 :

Soit $(k; n) \in \mathbb{N}^2$

❶ **Symétrie :**
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

❷ **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geq 1$,
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

❸ **Formule de Pascal :**
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

❹ **Intégralité :** $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Coefficients binomiaux

L'assertion (1) de la proposition (9) permet de compléter les premières valeurs de l'exemple (11) :

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

	...	k	$k+1$...		k	0	1	2	3	4	5
\vdots					n							
n		$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$		0	1	1	1	1	1	1	1
$n+1$			$\binom{n+1}{k+1}$		1	1	2	1	1	1	1	1
\vdots					2	1	2	1	1	1	1	1
					3	1	3	3	1	1	1	1
					4	1	4	6	4	1	1	1
					5	1	5	10	10	5	1	1

Figure 3 – Triangle de Pascal



Symétrie

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif^[1] et n un entier naturel.

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. && \text{(B.N)} \\ &= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

[1]. *i.e.* un anneau dont les DEUX lois $+$ et \times sont commutatives. Surtout le produit !



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. && \text{(B.N)} \\ &= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Remarque : Il est parfois plus avantageux d'écrire cette formule en inversant les rôles de a et b sous la forme :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. && \text{(B.N)} \\ &= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

ATTENTION

Il est très important que l'ensemble contenant a et b soit commutatif pour la loi multiplicative sinon cette formule est fautive. Ceux parmi vous qui ont suivi l'option mathématiques expertes l'année dernière devraient s'en souvenir.



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (\text{B.N})$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Exercice 9 :

Développer :

❶ $(x - y)^3$

❷ $(1 + x\sqrt{2})^4$

❸ $(2 - x)^5$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Exemples 12 :

$$\begin{aligned} \blacksquare (a-b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k} \\ &= a^n - na^{n-1}b + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n. \end{aligned}$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Exemples 12 :

- $(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$
 $= a^n - na^{n-1}b + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n.$
- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Exemples 12 :

$$\begin{aligned} \blacksquare (a-b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k} \\ &= a^n - na^{n-1}b + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Pour } a = b = 1, \text{ on obtient } 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

$$\blacksquare \text{ Pour } a = -b = 1, \text{ on obtient } 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Exemples 12 :

$$\begin{aligned} \blacksquare (a-b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k} \\ &= a^n - na^{n-1}b + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Pour } a = b = 1, \text{ on obtient } 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

$$\blacksquare \text{ Pour } a = -b = 1, \text{ on obtient } 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ Si } n \geq 1, \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &\stackrel{\text{Formule du capitaine}}{=} \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \stackrel{\text{On factorise}}{=} n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &\stackrel{k \leftarrow k-1}{=} n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \stackrel{(1+1)^{n-1}}{=} n \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Exemple B :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k.$$



III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

2. Binôme de Newton

Exemple 14 (Application au calcul des sommes de puissances d'entiers) :

En reprenant les notations du **théorème (5)**,

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_n(p) = \sum_{k=0}^n k^p.$$

On peut calculer les $S_n(p)$ de proche en proche à l'aide de la formule du binôme (B.N) et en considérant la somme :

$$S = \sum_{k=0}^n \left((1+k)^{p+1} - k^{p+1} \right).$$

La somme S peut alors être calculée de deux façons :

- D'une part, comme somme télescopique : $S = (1+k)^{n+1} - 0^{n+1} = (1+k)^{n+1}$.
- D'autre part, à l'aide de la formule du binôme (B.N), ce qui fait disparaître les termes d'exposant $p+1$.

On isole ensuite les termes d'exposant p pour reconnaître les expressions cherchées de $S_n(p)$.



IV. Sommes doubles

- 1 Sommes et Produits
- 2 Méthodes de calculs de sommes et de produits
- 3 Coefficients binomiaux et formule du binôme
- 4 Sommes doubles**
 - Permutation des sommes
 - Permutation des produits



IV. Sommes doubles

Certaines familles peuvent être indexées sur un produit cartésien (ou au moins un sous-ensemble). Soit R ^[1] un sous-ensemble de $I \times J$ et $(a_{i,j})_{(i;j) \in R}$ une famille doublement indexée *i.e.* indexée sur un produit cartésien.

Le but est d'étudier la somme $\sum_{(i;j) \in R} a_{i,j}$ en se ramenant à des sommes portant sur un seul des deux indices. On parle alors de « coupe » de l'ensemble R .

[1]. R comme rectangle.



IV. Sommes doubles

Définition 4 (Somme sur un rectangle et sur un triangle) :

Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E .

On note :

- $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$.
- $\prod_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}$ le produit des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$.



IV. Sommes doubles

Définition 4 (Somme sur un rectangle et sur un triangle) :

Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{i,j})_{(i;j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E .

On note :

- $\sum_{(i;j) \in I \times J} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j) \in I \times J}$.
- $\prod_{(i;j) \in I \times J} a_{i,j}$ le produit des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j) \in I \times J}$.

Si la famille est indexée par des couples $(i;j)$ vérifiant une condition du type $i \leq j$, $i < j$, $i \geq j$, ou $i > j$, on dit que la somme ou le produit est **triangulaire**, et on note :

$$\bullet \sum_{\substack{(i;j) \in I \times J \\ i \leq j}} a_{i,j}$$

$$\bullet \sum_{\substack{(i;j) \in I \times J \\ i < j}} a_{i,j}$$

$$\bullet \prod_{\substack{(i;j) \in I \times J \\ i \leq j}} a_{i,j}$$

$$\bullet \prod_{\substack{(i;j) \in I \times J \\ i \leq j}} a_{i,j}$$

IV. Sommes doubles

Notations : Lorsque $I = \llbracket m ; n \rrbracket$ et $J = \llbracket p ; q \rrbracket$, la somme de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ se note :

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq i, j \leq n} a_{ij} \quad \text{si } I = J = \llbracket m ; n \rrbracket.$$



IV. Sommes doubles

Notations : Lorsque $I = \llbracket m ; n \rrbracket$ et $J = \llbracket p ; q \rrbracket$, la somme de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ se note :

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq i, j \leq n} a_{ij} \quad \text{si } I = J = \llbracket m ; n \rrbracket.$$

ATTENTION

Dans la dernière écriture, l'expression $m \leq i, j \leq n$ n'est permise que si i et j sont deux variables indépendantes.



IV. Sommes doubles

Exemples 15 :

$$\bullet \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$



IV. Sommes doubles

Exemples 15 :

$$\bullet \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

$$\bullet \prod_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{360}$$



IV. Sommes doubles

Exemples 15 :

$$\bullet \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

$$\bullet \sum_{0 \leq i < j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

$$\bullet \prod_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{360}$$



IV. Sommes doubles

Exemples 15 :

$$\bullet \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

$$\bullet \prod_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{360}$$

$$\bullet \sum_{0 \leq i < j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

$$\bullet \prod_{0 \leq i < j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{40}$$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Théorème II (Somme double indexée par un rectangle) :

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $\llbracket m ; n \rrbracket \times \llbracket p ; q \rrbracket$.

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q a_{ij} = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n a_{ij}.$$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Théorème II (Somme double indexée par un rectangle) :

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $\llbracket m ; n \rrbracket \times \llbracket p ; q \rrbracket$.

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q a_{ij} = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n a_{ij}.$$

Dans le cas d'un rectangle, les sommes permutent donc sans contraintes.



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Preuve :

$i \backslash j$	p	$p+1$	\dots	q	Total
m	a_{mp}	$a_{m,p+1}$	\dots	a_{mq}	$\sum_{j=p}^q a_{mj}$
$m+1$	$a_{m+1,p}$	$a_{m+1,p+1}$	\dots	$a_{m+1,q}$	$\sum_{j=p}^q a_{m+1,j}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
n	a_{np}	$a_{n,p+1}$	\dots	a_{nq}	$\sum_{j=p}^q a_{nj}$
Total	$\sum_{i=m}^n a_{ip}$	$\sum_{i=m}^n a_{i,p+1}$	\dots	$\sum_{i=m}^n a_{iq}$	$\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q a_{ij}$ $\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n a_{ij}$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Théorème 12 (Somme double indexée par un triangle) :

Soient m et n des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E indexée par le triangle $\{(i;j) \in I \times J / m \leq i \leq j \leq n\}$.

$$\sum_{m \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^j a_{ij}.$$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

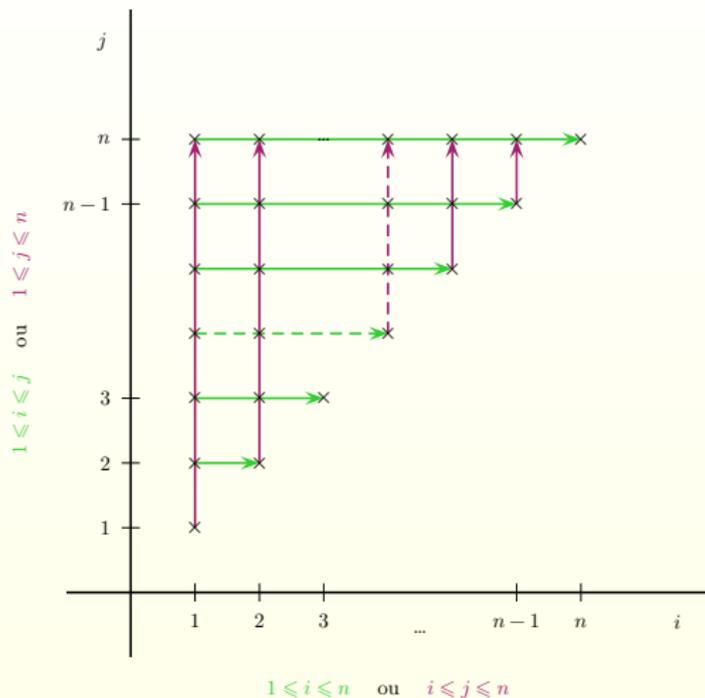


Figure 4 – Sommatation par tranches



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Preuve :

$i \backslash j$	m	$m+1$...	n	Total
m	$a_{m m}$	$a_{m m+1}$...	$a_{m n}$	$\sum_{j=m}^n a_{m j}$
$m+1$		$a_{m+1 m+1}$...	$a_{m+1 n}$	$\sum_{j=m+1}^n a_{m+1 j}$
\vdots			\ddots	\vdots	\vdots
n				$a_{n n}$	$\sum_{j=n}^n a_{n j}$
Total	$\sum_{i=m}^m a_{i m}$	$\sum_{i=m}^{m+1} a_{i m+1}$...	$\sum_{i=m}^n a_{i n}$	$\sum_{i=m}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}$ $\sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^j a_{ij}$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Si l'on somme sans prendre la diagonale *i.e.* les termes a_{ii} , $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on obtient :

$$\sum_{m \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=m+1}^n \sum_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Exercice 10 :

Calculer $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$.



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Proposition 13 (Produit de deux sommes) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles d'éléments de E .

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j.$$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Proposition 13 (Produit de deux sommes) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles d'éléments de E .

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j.$$

$$\blacksquare \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (\text{Carrée d'une somme})$$



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Proposition 13 (Produit de deux sommes) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles d'éléments de E .

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j.$$

$$\blacksquare \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (\text{Carrée d'une somme})$$

Remarque : On retrouve avec le deuxième terme du carré d'une somme, le célèbre double produit de l'identité remarquable du second degré. Il s'agit ici d'une généralisation de cette identité remarquable à n termes.



IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Proposition 13 (Produit de deux sommes) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles d'éléments de E .

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j.$$

$$\blacksquare \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (\text{Carrée d'une somme})$$

Remarque : On retrouve avec le deuxième terme du carré d'une somme, le célèbre double produit de l'identité remarquable du second degré. Il s'agit ici d'une généralisation de cette identité remarquable à n termes.

Exemple 16 :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Les résultats précédents du **théorème (11)** et du **théorème (12)** s'étendent de façon immédiate si on remplace « somme double » par « produit double » :

Théorème 14 :

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E indexée par un rectangle $\llbracket m ; n \rrbracket \times \llbracket p ; q \rrbracket$ ou un triangle $\{(i,j) \in I \times J / m \leq i \leq j \leq n\}$.

On a :

Sur un rectangle :
$$\prod_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} = \prod_{i=m}^n \prod_{j=p}^q a_{ij} = \prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n a_{ij}.$$

Sur un triangle :
$$\prod_{m \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \prod_{i=m}^n \prod_{j=i}^n a_{ij} = \prod_{j=m}^n \prod_{i=m}^j a_{ij}.$$

(sans la diagonale)
$$\prod_{m \leq i < j \leq n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n a_{ij} = \prod_{j=m+1}^n \prod_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$$

IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2)$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2)$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j^2 \right)$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(i^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2 \right)\end{aligned}$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(i^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^n (i^n n!^2)\end{aligned}$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(i^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^n (i^n n!^2) \\ &= (n!)^{2n} \times \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n\end{aligned}$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(i^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^n (i^n n!^2) \\ &= (n!)^{2n} \times \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n = (n!)^{2n} \times (n!)^n\end{aligned}$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exemple 17 :

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(i^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^n (i^n n!^2) \\ &= (n!)^{2n} \times \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n = (n!)^{2n} \times (n!)^n \\ &= (n!)^{3n}.\end{aligned}$$



IV. Sommes doubles

2. Permutation des produits

Exercice II :

Est-il vrai que $\prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m z_{ij}$?

