

Sommes et Produits

I/ Quelques exercices très simples

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants en utilisant la factorielle :

1. $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$

3. $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7}$

5. $\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}$

2. $n(n-1)(n-2)$

4. $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$

Exercice 2 : Simplifier au maximum :

1. $\frac{n!}{(n+1)!}$

2. $\frac{n!}{p!}, \quad p < n$

3. $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

4. $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

Exercice 3 : Calculer (sans calculatrice!)

1. $\binom{8}{3}$

2. $\binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$

3. $\frac{\binom{10}{7}}{\binom{10}{4}}$

4. $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes ($n \in \mathbb{N}$)

1. $\binom{n}{2} = 36$

3. $9 \binom{n}{3} = 14 \binom{n}{2}$

5. $\binom{n}{n-2} = 780$

2. $\binom{n}{2} = \binom{n}{4}$

4. $2 \binom{n}{3} = 21n$

Exercice 5 : Montrer, sans récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}.$$

Exercice 6 : Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 7 :

1. Trouver des réels a , b et c tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}. \quad (\text{V.1})$$

2. En déduire le calcul de $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 8 : Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier relatif.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est aussi un entier relatif.

II/ Sommes et produits

Exercice 9 : Calculer les sommes et les produits suivants :

- | | | |
|-------------------------------|--|--|
| 1. $\sum_{k=1}^n (k+1)(k+2).$ | 5. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$ | 9. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}.$ |
| 2. $\sum_{k=1}^n (2k-1).$ | 6. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$ | 10. $\sum_{k=0}^{2n} \min(k; n)$ |
| 3. $\sum_{p=-n}^n (p+1).$ | 7. $\sum_{k=1}^n k \times k!.$ | 11. Pour $p < n$, $\sum_{k=p}^n 3^k.$ |
| 4. $\sum_{i=0}^n (n-i).$ | 8. $\prod_{k=0}^n (2k+1).$ | |

Exercice 10 : Simplifier pour tout entier $n \geq 2$ le produit :

$$T_n = \prod_{p=2}^n \frac{p^3 + 1}{p^3 - 1}.$$

et en déduire que la suite $(T_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

Exercice 11 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = \{0; 1 \ 2; \dots; 2n-1\}$.

En écrivant E sous la forme d'une union disjointe de ses éléments pairs et de ses éléments impairs, calculer :

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor, \text{ où } \lfloor x \rfloor \text{ représente la partie entière de } x.$$

Exercice 12 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k$.

III/ Binôme and Co _____

Exercice 13 : Montrer que pour tout couple d'entiers $(n; p)$ avec $p \geq n$, on a :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 14 : On considère x , un nombre réel, et n un entier naturel.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$. En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$. En déduire $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$. En déduire $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.
5. Dans la même idée, calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 15 (Critère de divisibilité par 3, 9 et 11) : On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est $n = a_p \dots a_1 a_0$ de sorte que :

$$n = a_p 10^p + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

1. Montrer que n est multiple de 3 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p a_k$ est multiple de 3.
2. Montrer que n est multiple de 9 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p a_k$ est multiple de 9.
3. Montrer que n est multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Exercice 16 : Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18 (Petit théorème de Fermat) : Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par p pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p .
3. En déduire que si n n'est pas divisible par p alors p divise $n^{p-1} - 1$.

Exercice 19 : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$.

1. Calculer S_1 .
2. Exprimer $A(n) = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$ en fonction de S_1, S_2 et S_3 .
3. Par changement d'indice dans $A(n)$, exprimer $A(n)$ uniquement en fonction de S_3 .
4. En déduire une formule pour S_2 .
5. Calculer S_3 par une méthode analogue.

Exercice 20 : Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

Quand y a-t-il égalité ?

IV/ Sommes et produits sur un rectangle ou un triangle _____

Exercice 21 : Calculer :

1. $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x^{i+j}.$
2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j).$
3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2.$
4. $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / i+j=n} ij.$
5. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij.$
6. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j).$

Exercice 22 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

1. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}.$
2. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij.$
3. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j.$
4. $\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{\frac{i}{j}}.$
5. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{j}.$
6. $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}.$