Sommes et Produits

I/ Quelques exercices très simples

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants en utilisant la factorielle :

1. $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$
2. $n(n-1)(n-2)$
3. $\dfrac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7}$
4. $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$
5. $\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}$

Correction :

1. $\dfrac{9!}{4!}$
2. $\dfrac{n!}{(n-3)!}$
3. $\dfrac{12!4!}{7!8!}$
4. $2^n n!$
5. $\dfrac{11!}{(2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10)^2} = \dfrac{11!}{(2^5 \times 5!)^2} = \dfrac{11!}{2^{10}(5!)^2}$

Exercice 2 : Simplifier au maximum :

1. $\dfrac{n!}{(n+1)!}$
2. $\dfrac{n!}{p!}, \quad p < n$
3. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
4. $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Exercice 3 : Calculer (sans calculatrice !)

1. $\dbinom{8}{3}$
2. $\dbinom{5}{3}\dbinom{5}{4}\dbinom{5}{5}$
3. $\dfrac{\binom{10}{7}}{\binom{10}{4}}$
4. $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$.

Correction :

1. 56
2. 50
3. $\dfrac{4}{7}$
4. $\dfrac{24}{91}$.

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes ($n \in \mathbb{N}$)

1. $\binom{n}{2} = 36$
2. $\binom{n}{2} = \binom{n}{4}$
3. $9\binom{n}{3} = 14\binom{n}{2}$
4. $2\binom{n}{3} = 21n$
5. $\binom{n}{n-2} = 780$

Correction :

5. On se rappellera de la symétrie des coefficients binomiaux.

Exercice 5 : Montrer, sans récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}.$$

Correction : Une plaisanterie ?

Exercice 6 : Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Correction : Il suffit d'étudier le signe de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{>\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{<\frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} < 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.

Exercice 7 :

1. Trouver des réels a, b et c tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}. \tag{V.1}$$

2. En déduire le calcul de $\mathrm{K}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Correction :

1. Considérons l'équation, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$ en admettant qu'une telle écriture existe.

   En multipliant les deux membres par $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \left(\dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}\right) \times k$.

   Enfin pour $k = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$.

   Multipliant successivement l'équation (V.1) par $k+1$ et évaluant en $k = -1$ puis par $k+2$, évaluant en $k = -2$, on trouve : $b = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

   Réciproquement, on vérifie que $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$ conviennent.

   Donc, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+2)}$.
2. Par un petit miracle, on peut écrire, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

   On conclut alors par linéarité et télescopage :

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Soit x un réel tel que $x + \dfrac{1}{x}$ soit un entier relatif.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est aussi un entier relatif.

Correction : En remarquant que

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right),$$

le résultat se montre facilement par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

II/ Sommes et produits

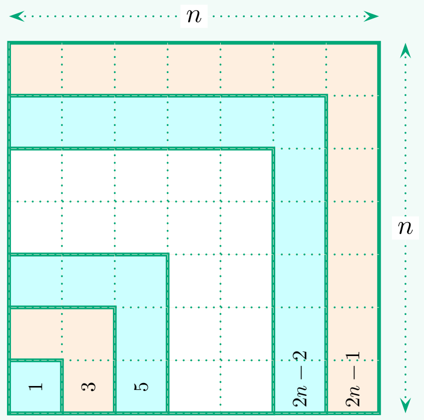
Exercice 9 : Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.
3. $\displaystyle\sum_{p=-n}^{n}(p+1)$.
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(n-i)$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\times k!$.
8. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$.
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k\,;n)$
11. Pour $p<n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}3^k$.

Correction : Pour l'essentiel ce sont des sommes usuelles ou des sommes de termes d'une suite géométrique, usuelles aussi donc.

1. Il suffit simplement de développer et d'utiliser les sommes classiques :
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\frac{n(n+1)}{2}+2n$$
$$=\frac{n}{3}(n^2+6n+11).$$

2. Plusieurs méthodes dont l'une est d'écrire $2k+1=(k+1)^2-k^2$.



Un peu d'histoire : *Cette formule et son interprétation géométrique étaient déjà connue des grecs antiques comme Euclide.*

Figure V.1 – $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$.

3. $\displaystyle\sum_{p=-n}^{n}(p+1)=\sum_{p=1}^{n}(p+1)+1+\sum_{p=-n}^{-1}(p+1)=\sum_{p=1}^{n}(p+1)+1+\sum_{p=1}^{n}(-p+1)=2n+1.$
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(n-i)=\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$ par réindiçage décroissant.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$ par décomposition en éléments simples puis télescopage.
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k\times k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k}{k-1}}\right)=\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{2}{1}}=\frac{n+1}{2n}$ par télescopage.

7. $(k+1)!-k! = k\times k!$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times k! = (n+1)!-1$.

8. On va rajouter (et enlever) les nombres pairs qui manquent à $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ pour former $(2n+1)!$:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2\times 4\times \ldots\times(2n-2)\times(2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n(1\times 2\times\ldots\times(n-1)\times n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-1\right)$.

10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k\,;n) = \sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2}+n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}$.

11. Pour $p<n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}3^k = 2\times 3^p\left(3^{n-p+1}-1\right)$.

Exercice 10 : Simplifier pour tout entier $n\geqslant 2$ le produit :

$$\mathrm{T}_n = \prod_{p=2}^{n}\frac{p^3+1}{p^3-1}.$$

et en déduire que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

Correction : $\displaystyle\mathrm{T}_n = \prod_{p=2}^{n}\frac{p^3+1}{p^3-1} = \prod_{p=2}^{n}\frac{(p+1)(p^2-p+1)}{(p-1)(p^2+p+1)} = \left(\prod_{p=2}^{n}\frac{p+1}{p-1}\right)\left(\prod_{p=2}^{n}\frac{p^2-p+1}{p^2+p+1}\right)$

$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\prod_{p=2}^{n}\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ En reconnaissant un produit télescopique dans le premier facteur.

$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\prod_{p=2}^{n}\frac{(2p-1)^2+3}{(2p+1)^2+3}$ En multipliant par $\frac{4}{4}$.

$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\prod_{p=2}^{n}\frac{(2(p-1)+1)^2+3}{(2p+1)^2+3}$ Encore un produit télescopique.

$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\,\frac{(2+1)^2+3}{(2n+1)^2+3}$

$\displaystyle = \frac{6n(n+1)}{(2n+1)^2+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$

Exercice 11 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{E} = \{0;\ 1\ 2;\ \ldots\,;\ 2n-1\}$.

En écrivant E sous la forme d'une union disjointe de ses éléments pairs et de ses éléments impairs, calculer :

$$\sum_{j=0}^{2n-1}\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor,\ \text{où } \lfloor x\rfloor \text{ représente la partie entière de } x.$$

Correction : On a $E = \{2p+1,\, p \in [\![0\,;n-1]\!]\} \sqcup \{2p,\, p \in [\![0\,;n-1]\!]\} = E_i \sqcup E_p$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor = \sum_{j\in E} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$.

Or,
$$\sum_{j\in E} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor = \sum_{j\in E_i\sqcup E_p} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor = \sum_{j\in E_i} \left\lfloor \frac{2j+1}{2} \right\rfloor + \sum_{j\in E_p} \left\lfloor \frac{2j}{2} \right\rfloor$$
$$= \sum_{j\in E_i} j + \sum_{j\in E_p} j = \sum_{j=0}^{n-1} j + \sum_{j=0}^{n-1} j = 2\sum_{j=0}^{n-1} j = (n-1)n.$$

Exercice 12 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^{n} k^k$.

Correction : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour l'hérédité,
$$\prod_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!} = (n+1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = (n+1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} \times 1 = (n+1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n} k^k = \prod_{k=1}^{n+1} k^k.$$

III/ Binôme and Co

Exercice 13 : Montrer que pour tout couple d'entiers $(n\,;p)$ avec $p \geqslant \mathrm{N}$, on a :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Correction :

Avec les sommes télescopiques : Pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, la relation de Pascal s'écrit :
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1} \iff \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

D'où, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \cancel{\binom{p}{p+1}} = \binom{n+1}{p+1}$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: Pour l'hérédité,
$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Exercice 14 : On considère x, un nombre réel, et n un entier naturel.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}$.
5. Dans la même idée, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Correction : Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. Dans $\mathbb{R}$ le produit est commutatif. D'après le **binôme de Newton**, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1^n=1.$$

Pour $x=\dfrac{1}{2}$, $x^k(1-x)^{n-k}=\dfrac{1}{2^n}$ et on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

2. D'après la formule du capitaine, on a : $k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}&=\sum_{k=0}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=nx\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}x^{\ell}(1-x)^{(n-1)-\ell}\\&=nx[x+(1-x)]^{n-1}\\&=nx.\end{aligned}$$

Pour $x=\dfrac{1}{2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

3. De même, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ qui entraîne :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\
&= \sum_{k=2}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\
&= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)}\\
&= n(n-1)x^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell} x^{\ell}(1-x)^{(n-2)-\ell}\\
&= n(n-1)x^2[x+(1-x)]^{n-2}\\
&= n(n-1)x^2.
\end{aligned}$$

Pour $x=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} &= n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}\\
&= n\left(3n-1\right)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad + \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right.\\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]\\
&= x^2\times 1 - \frac{2x}{n}\times nx + \frac{1}{n^2}[n(n-1)x^2+nx]\\
&= x^2-2x^2+\left(1-\frac{1}{n}x^2\right)+\frac{1}{n}x\\
&= \frac{x-x^2}{n}.
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Exercice 15 (Critère de divisibilité par 3, 9 et 11) : On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est $n = a_p \cdots a_1 a_0$ de sorte que :

$$n = a_p 10^p + \ldots + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

1. Montrer que n est multiple de 3 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.
2. Montrer que n est multiple de 9 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 9.
3. Montrer que n est multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Correction :

1. Comme $10 = 9 + 1$, d'après le binôme de Newton pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^k = 3q_k + 1.$$

Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = 3\left(\sum_{k=0}^{p} a_k q_k\right) + \sum_{k=0}^{p} a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 3 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.

2. Le raisonnement est identique à partir de $10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^k = 9q_k + 1$.
3. Une nouvelle fois, on utilise le binôme de Newton avec $10 = 11 - 1$:

$$10^k = (11-1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} + \binom{k}{k} (-1)^k = 11q_k + (-1)^k.$$

D'où,

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = 11\left(\sum_{k=0}^{p} a_k q_k\right) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Exercice 16 : Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$

Sommes et Produits

Correction : On ne vous donne pas ces deux sommes ensemble par hasard. Il faut les traiter ensemble : deux inconnues dont on cherche deux équations :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

et

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Exercice 17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

La réciproque est-elle vraie ?

Correction : Supposons que n n'est pas premier.

On peut écrire $n = pq$ avec $1 < p < n$.

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k$$

Donc, $2^p - 1 | 2^n - 1$.

Or, $1 < 2^p - 1 < 2^n - 1$ donc $2^n - 1$ admet un diviseur autre que 1 et lui-même. Il n'est pas premier.

Par contraposition, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

La réciproque est fausse. En effet, 11 est premier et $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ ne l'est pas.

Remarque : $\mathrm{M}_n = 2^n - 1$ est le $n^{\text{ème}}$ nombre de Mersenne.

Exercice 18 (Petit théorème de Fermat) : Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par p pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p.
3. En déduire que si n n'est pas divisible par p alors p divise $n^{p-1} - 1$.

Correction :

1. D'après la formule du capitaine, on sait que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$. L'entier p divise alors le produit $k\binom{p}{k}$.

   Comme p est un nombre premier, il ne divise un produit d'entiers que s'il divise l'un des facteurs de ce produit. Mais, il est strictement supérieur à k, il ne peut donc le diviser et il divise $\binom{p}{k}$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

   Au rang $n = 0$ l'égalité est triviale : $0^p - 0 = 0$ est divisible par p.

   Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton on a :

$$(n+1)^p - (n+1) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k - n - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + n^p - n.$$

   Par hypothèse de récurrence p divise $n^p - n$ et, d'après la question précédente, p divise tous les $\binom{p}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$ donc p divise $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$ par compatibilité de la relation de divisibilité avec les combinaisons linéaires entières et la propriété est héréditaire.

   Initialisée à partir de $n = 0$, d'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Il suffit de factoriser : $n^p - n = n\left(n^{p-1} - 1\right)$.

   Si p premier ne divise pas n, il divise $n^{p-1} - 1$.

   Commentaires : *Ce n'est pas le théorème de Gauss mais un théorème un peu plus faible démontré dans le cours.*

Exercice 19 : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Calculer S_1.
2. Exprimer $A(n) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ en fonction de S_1, S_2 et S_3.
3. Par changement d'indice dans $A(n)$, exprimer $A(n)$ uniquement en fonction de S_3.
4. En déduire une formule pour S_2.
5. Calculer S_3 par une méthode analogue.

Correction :

1. En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, il suffit de sommer les deux membres de cette égalité pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ et reconnaitre une somme télescopique dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (2k+1) &= \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) \\ 2\mathrm{S}_1 + n &= (n+1)^2 - 1 \\ \mathrm{S}_1 &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - n - 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

2. Il suffit de développer :

$$\mathrm{A}(n) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \mathrm{S}_3 + 3\mathrm{S}_2 + 3\mathrm{S}_1 + n.$$

3. $\mathrm{A}(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = \mathrm{S}_3 + (n+1)^3 - 1.$
4. Avec les deux questions précédentes, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_3 + 3\mathrm{S}_2 + 3\mathrm{S}_1 + n &= \mathrm{S}_3 + (n+1)^3 - 1 \\ \mathrm{S}_2 &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right) \\ \mathrm{S}_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

5. Dans la même idée, posons $\mathrm{B}(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_4 + 4\mathrm{S}_3 + 6\mathrm{S}_2 + 4\mathrm{S}_1 + n &= \mathrm{S}_4 + (n+1)^4 - 1 \\ \mathrm{S}_3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)\left((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)\left((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2\left((n+1)^2 - (2n+1)\right) \\ \mathrm{S}_2 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 20 : Montrer que, pour tous $a,\, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

Quand y a-t-il égalité ?

Sommes et Produits

Correction : Appliquons le binôme de Newton pour développer $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n$ et $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, nous obtenons :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^k$$
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^k$$

Ajoutons ces deux expressions :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k\right)$$

Observons maintenant que $\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k$ est un nombre réel positif pour tout k.

En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, nous pouvons dire que pour tout k,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \geqslant 2\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k} = 2$$

Commentaires : *Ca fait plus classe de parler d'inégalité géométrique mais on peut tout aussi bien étudier le minimum de la fonction $x \longmapsto x^k + \frac{1}{x^k}$ qui est atteint en 1 et qui vaut 2.*

En sommant sur tous les termes k, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k\right) \geqslant 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Conclusion, $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$ avec égalité lorsque $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$ *i.e.* $a = b$.

IV/ Sommes et produits sur un rectangle ou un triangle

Exercice 21 : Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^{i+j}$.
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$.
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$.
4. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=n} ij$.
5. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.
6. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$.
7. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$
8. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{i}{j}$
9. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$
10. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j}$
11. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{i}{j} 2^{i+j}$
12. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i} 2^{i+j}$
13. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$

Sommes et Produits

Correction :

1. On suppose $x \neq 1$ pour éviter le cas trivial égal à $(n+1)^2$.
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i \sum_{j=0}^{n} x^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\sum_{i=0}^{n} x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.$$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = n^2(n+1).$
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$
4. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=n} ij = \sum_{i=0}^{n} i(n-i) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$
5. $$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} ij\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=2}^{n} j\times\frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.\end{aligned}$$
6. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
7. $$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}|i-j| &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|i-j| = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i-1}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} j - \sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - ni + i^2\right)\\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$
8. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1.$
9. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}-1.$
10. $$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j} &= \sum_{j=0}^{n} 2^j\sum_{i=0}^{j} 2^i = \sum_{j=0}^{n}\left(2^{2j+1}-2^j\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(2^{2n+3} - 3\times 2^{n+1} + 1\right).\end{aligned}$$
11. $$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j} 2^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n} 2^i\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j} 2^j = \sum_{i=0}^{n} 2^{2i}\\ &= \frac{1}{3}\left(2^{2n+2}-1\right).\end{aligned}$$
12. $$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} 2^{i+j} &= \sum_{j=0}^{n} 2^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} 2^i = \sum_{j=0}^{n} 6^j\\ &= \frac{1}{5}\left(6^{n+1}-1\right).\end{aligned}$$

13. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j=3^n.$$

Exercice 22 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer :

1. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} x^{i+j}$.
2. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} ij$.
3. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} i^j$.
4. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}}$.
5. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$.
6. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

Correction :

1. $$\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} x^{i+j}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x^i\times x^j)=\prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\prod_{j=1}^{n}x^j\right)=\prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\times x^{\sum\limits_{j=1}^{n} j}\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\times x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x^i\right)^n=x^{\frac{n^2(n+1)}{2}}\times x^{\frac{n^2(n+1)}{2}}$$
$$=x^{n^2(n+1)}.$$

2. $$\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} ij=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(i^n\prod_{1\leqslant j\leqslant n}j\right)=(n!)^n\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}i\right)^n=(n!)^n(n!)^n=(n!)^{2n}.$$

3. $$\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} i^j=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}i^j=\prod_{i=1}^{n}i^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=(n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\sqrt{n!}\right)^{n(n+1)}.$$

4. $$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j}2^{\frac{i}{j}}=\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j}2^i\right)^{\frac{1}{j}}=\prod_{j=1}^{n}\left(2^{\frac{j(j+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{j}}=\prod_{j=1}^{n}2^{\frac{(j+1)}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\left(\sqrt{2}\right)^j$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

5. $$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j}=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}\right)=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}i^n\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j}\right)=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{i^n}{n!}$$
$$=\frac{1}{(n!)^n}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}i\right)^n=\frac{(n!)^n}{(n!)^n}=1.$$

Commentaires : *Ce qui était évident en comptant les apparitions de chaque entier au numérateur et dénominateur grâce à la commutativité du produit.*

6. $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} i=\prod_{2\leqslant j\leqslant n}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant j-1}i\right)=\prod_{2\leqslant j\leqslant n}(j-1)!$$

et $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} j=\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left(\prod_{i+1\leqslant j\leqslant n}j\right)=\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\frac{n!}{i!}=(n!)^{n-1}\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\frac{1}{i!}=(n!)^{n-1}\prod_{2\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{(i-1)!}.$$

D'où, $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}i}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}j}=\frac{1}{(n!)^{n-1}}\left(\prod_{2\leqslant j\leqslant n}(j-1)!\right)^2.$$

Commentaires : *Je n'ai pas mieux ! ;-(*

Sommes et Produits