Une fonction sympathique

1. Faire l'étude complète de la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{th} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}. \end{array}$$

(Domaine de définition, domaine d'étude, branches infinies, dérivabilité, tangente en 0, courbe représentative.)

2. (a) Pour tout x réel, exprimer $\mathrm{th}\,(2x)$ en fonction de $\mathrm{th}\,(x)$.

   (b) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{th}\,(x) = \dfrac{2}{\mathrm{th}\,(2x)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}\,(x)}$.

   (c) ($\star$) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, une expression plus simple sur $\mathbb{R}$ de

$$\mathrm{S}_n(x) = \mathrm{th}\,(x) + 2\mathrm{th}\,(2x) + \cdots + 2^{n-1}\mathrm{th}\,(2^{n-1}x).$$

3. (a) Montrer que th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. On notera argth cette réciproque.

   (b) Montrer que argth est dérivable sur J. Préciser sa dérivée et l'équation de sa tangente en 0.

   (c) Sur le même graphique que celui de la courbe représentative de th, tracer (en justifiant) celle de argth.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{th}\,(x)}{1-\mathrm{th}\,(x)}}\right) = x.$$

   En déduire une expression explicite de $\mathrm{argth}\,(x)$ sur J.

5. (a) Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}\,(p+q) = \dfrac{\mathrm{th}\,(p) + \mathrm{th}\,(q)}{1 + \mathrm{th}\,(p)\mathrm{th}\,(q)}$.

   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\mathrm{th}\,(5x)$ en fonction de $\mathrm{th}\,(x)$.