Une fonction sympathique

Commentaires : *Cessez d'écrire « la fonction* $\operatorname{th}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$ *» ! C'est dramatique de ne pas faire la différence en prépa entre une valeur et un objet !*

Même remarque pour ceux qui confondent la fonction et sa courbe. Faites un effort avant que je barre !

1. Les fonctions sh et ch sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1 > 0$ donc th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   De plus, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine et, par parité et imparité respectivement de ch et sh, la fonction th est impaire.

   Commentaires : *Dernière fois que je tolère que vous ne parliez pas de la symétrie de l'intervalle de définition !*

   On l'étudiera donc sur $[0\,;+\infty[$ et on complètera la courbe par symétrie de centre O.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$ d'après les théorèmes sur les limites de somme puis de quotient.

   En particulier, la courbe de th admet respectivement les asymptotes d'équation $y = \pm 1$ en $\pm\infty$.

   La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0.$$
   $$(\text{ou } = 1 - \operatorname{th}^2(x).)$$

   En particulier, la tangente en 0, a pour équation $(T_0) :\ y = x$.

   On en déduit le tableau de variations ainsi que la courbe représentative :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\operatorname{th}'(x)$		$+$	
th	-1	$\nearrow$	1

Figure IV.1 – Tableau de variation $x \longmapsto \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$.

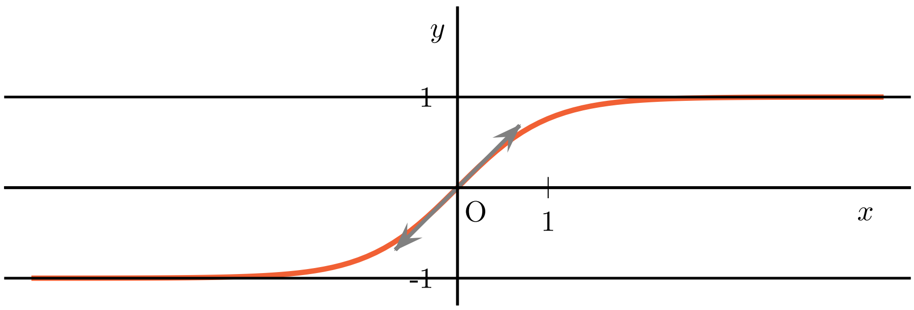

Figure IV.2 – Courbe représentative de $x \longmapsto \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(2x) &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{\frac{1}{2}\left((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2\right)} \\
&= \frac{2\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + 1} = \frac{2\operatorname{th}(x)}{\operatorname{th}^2(x) + 1}.
\end{aligned}$$

(b) On peut factoriser le membre de droite de l'égalité voulue mais aussi se servir de la question précédente :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}(x)}{\operatorname{th}^2(x)+1} \iff \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} = \frac{\operatorname{th}^2(x)+1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x) + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$.

(c) Pour $x = 0$, il est clair que $S_n(0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \operatorname{th}(x) + 2\operatorname{th}(2x) + \cdots + 2^{n-1}\operatorname{th}(2^{n-1}x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}\right) \\
&= \frac{2^b}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{2^0}{\operatorname{th}(2^0 x)} \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique.} \\
&= \frac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)} & \text{sinon.} \end{cases}$

Commentaires : *On verra plus tard, que cette expression se prolonge par continuité pour en $x = 0$.*

3. (a) D'après la première question, th est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème du même nom, elle établit donc une bijection tout aussi strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur son image $J = \operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1\,;1[$.

Sa bijection réciproque, notée argth, est donc définie sur $]-1\,;1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Commentaires : *Cessez de me parler d'injectivité et de surjectivité. Le théorème de la bijection est bien plus fort que ça et il ne demande que trois choses et les seules que je veux voir dans votre rédaction :*

CONTINUE, STRICTEMENT CROISSANTE (ou décroissante) et INTERVALLE !

(b) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ où sa dérivée ne s'y annule pas donc argth est dérivable sur tout J et on a :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{(x \longmapsto 1 - \operatorname{th}^2(x))\,(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Comme $\operatorname{th}(0) = 0$ alors $\operatorname{argth}(0) = 0$ et on a $\operatorname{argsh}'(0) = 1$.

L'équation de la tangente en 0 à la courbe de argth est donc $y = x$.

Commentaires : *Les courbes de* th *et* argth *sont donc, toutes deux, tangentes à la première bissectrice en* 0*.*

(c) De l'étude précédente, on en déduit le tableau de variations ainsi que la courbe représentative.

En particulier, $\lim\limits_{x\to\pm 1} \operatorname{argth}(x) = \pm\infty$. Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes à la courbe de argth.

x	-1		1
$\operatorname{argth}'(x)$	‖	$+$	‖
argth	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖

Figure IV.3 – Tableau de variation $x \longmapsto \operatorname{argth} x$ sur $\mathbb{R}$.

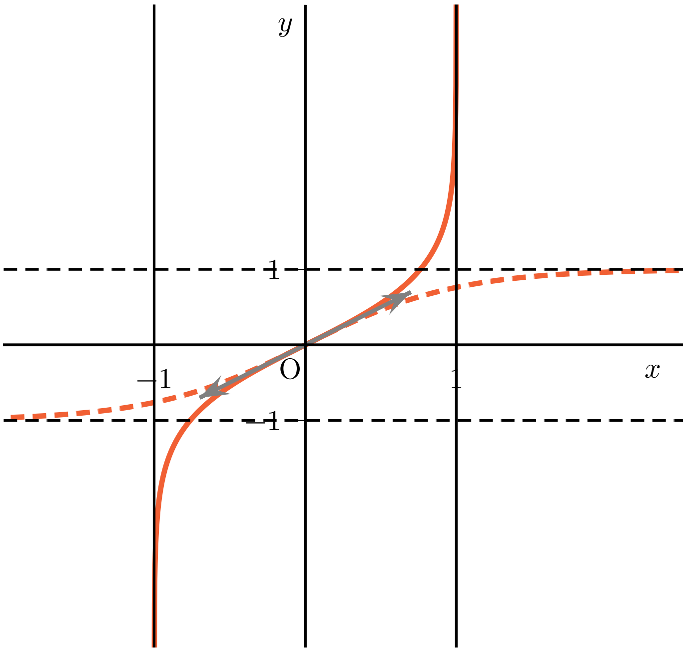

Figure IV.4 – Courbe représentative de $x \longmapsto \operatorname{argth} x$ sur $]-1\,;1[$.
En dash, la courbe de th et ses asymptotes.

4. D'après la première question, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) \neq 1$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positive si, et seulement si $\operatorname{th}(x) \in\,]-1\,;1[$.

   L'expression $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right)$ est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1-\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\,e^x}{2e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}\right)\\ &= x.\end{aligned}$$

   Conclusion, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right) = x$.

   Pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $\operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

5. (a) Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Toutes les expression sont définies car $|\text{th}\,(p)\text{th}\,(q)| < 1$.

$$\begin{aligned}
\text{th}\,(p+q) &= \frac{\text{sh}\,(p+q)}{\text{ch}\,(p+q)} \\
&= \frac{\text{sh}\,(p)\text{ch}\,(q) + \text{sh}\,(q)\text{ch}\,(p)}{\text{ch}\,(p)\text{ch}\,(q) + \text{sh}\,(q)\text{sh}\,(p)} \qquad \text{On factorise et simplifie par ch}\,(p)\text{ch}\,(q) \neq 0 \\
&= \frac{\dfrac{\text{sh}\,(p)}{\text{ch}\,(p)} + \dfrac{\text{sh}\,(q)}{\text{ch}\,(q)}}{1 + \dfrac{\text{sh}\,(q)}{\text{ch}\,(q)}\dfrac{\text{sh}\,(p)}{\text{ch}\,(p)}} \\
&= \frac{\text{th}\,(p) + \text{th}\,(q)}{1 + \text{th}\,(p)\text{th}\,(q)}.
\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $\text{th}\,(5x) = \dfrac{\text{sh}\,(5x)}{\text{ch}\,(5x)}$. Les fonctions $x \longmapsto \text{sh}\,(5x)$ et $x \longmapsto \text{ch}\,(5x)$ sont respectivement les parties impaires et paires de la fonction $x \mapsto e^{5x}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{5x} &= (\text{sh}\,(x) + \text{ch}\,(x))^5 \\
&= \text{sh}^5(x) + 5\text{sh}^4(x)\text{ch}\,(x) + 10\text{sh}^3(x)\text{ch}^2(x) \\
&\qquad + 10\text{sh}^2(x)\text{ch}^3(x) + 5\text{sh}\,(x)\text{ch}^4(x) + \text{ch}^5(x).
\end{aligned}$$

Par unicité des parties paire et impaire d'une fonction (et en particulier de $x \longmapsto e^{5x}$), on peut identifier :

$$\begin{cases} \text{sh}\,(5x) = \text{sh}^5(x) + 10\text{sh}^3(x)\text{ch}^2(x) + 5\text{sh}\,(x)\text{ch}^4(x); \\ \text{ch}\,(5x) = 5\text{sh}^4(x)\text{ch}\,(x) + 10\text{sh}^2(x)\text{ch}^3(x) + \text{ch}^5(x). \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{th}\,(5x) &= \frac{\text{sh}^5(x) + 10\text{sh}^3(x)\text{ch}^2(x) + 5\text{sh}\,(x)\text{ch}^4(x)}{5\text{sh}^4(x)\text{ch}\,(x) + 10\text{sh}^2(x)\text{ch}^3(x) + \text{ch}^5(x)} \\
&= \frac{\text{th}^5(x) + 10\text{th}^3(x) + 5\text{th}\,(x)}{5\text{th}^4(x) + 10\text{th}^2(x) + 1} \qquad \text{en factorisant par ch}^5(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Commentaires : *Une autre méthode pour utiliser la relation précédente :*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On sait déjà que $\text{th}\,(2x) = \dfrac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^2(x)}$.

D'où,
$$\begin{aligned}
\text{th}\,(3x) = \text{th}\,(2x + x) = \frac{\text{th}\,(2x) + \text{th}\,(x)}{1 + \text{th}\,(2x)\text{th}\,(x)} &= \frac{\dfrac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^2(x)} + \text{th}\,(x)}{1 + \dfrac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^2(x)} \times \text{th}\,(x)} \\
&= \frac{3\text{th}\,(x) + \text{th}^3(x)}{1 + 3\text{th}^2(x)}.
\end{aligned}$$

Enfin,
$$\begin{aligned}
\text{th}\,(5x) = \text{th}\,(2x + 3x) = \frac{\text{th}\,(2x) + \text{th}\,(3x)}{1 + \text{th}\,(2x)\text{th}\,(3x)} &= \frac{\dfrac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^2(x)} + \dfrac{3\text{th}\,(x) + \text{th}^3(x)}{1 + 3\text{th}^2(x)}}{1 + \dfrac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^2(x)} \times \dfrac{3\text{th}\,(x) + \text{th}^3(x)}{1 + 3\text{th}^2(x)}} \\
&= \frac{2\text{th}\,(x)\,(1 + 3\text{th}^2(x)) + (3\text{th}\,(x) + \text{th}^3(x))\,(1 + \text{th}^2(x))}{(1 + \text{th}^2(x))\,(1 + 3\text{th}^2(x)) + 2\text{th}\,(x)\,(3\text{th}\,(x) + \text{th}^3(x))} \\
&= \frac{\text{th}^5(x) + 10\text{th}^3(x) + 5\text{th}\,(x)}{5\text{th}^4(x) + 10\text{th}^2(x) + 1}.
\end{aligned}$$

Une fonction sympathique

Cette formule n'a aucun intérêt et n'était là que pour vous faire prendre de la hauteur vis-à-vis du calcul littéral par contre, sachez qu'elle se généralise pour tout $n \in \mathbb{N}$, si cela vous tente de le démontrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}(nx) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \operatorname{th}^{2k+1}(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \operatorname{th}^{2k}(x)}.$$