Fonctions de référence 2

Compléter :

I/ Fonction exponentielle de base a

Définition 5 (Exponentielle de base a) : Pour tout réel a strictement positif et tout réel x, on pose :

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}.$$

Théorème 18 :
Soit a un réel strictement positif fixé.

La fonction $f : x \longmapsto a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(a)\, a^x.$$

Proposition 19 :
Soit a un réel strictement positif fixé.

$a > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0^+$.

$a < 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Cas $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		$+$	
a^x	0	1	$+\infty$

Cas $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		$-$	
a^x	$+\infty$	1	0

Figure IV.1 – La fonction exponentielle de base $a > 0$, $x \longmapsto a^x$.

Proposition 23 (Croissances comparées) :
Pour tous α, β strictement positifs .

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x)\right)^\alpha}{x^\beta} = 0.$

— $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0.$

II/ Les fonctions hyperboliques

Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :

— On appelle fonction *cosinus hyperbolique* la partie paire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

En particulier, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x).$$

Proposition 27 (Cosinus hyperbolique) :

1. $\mathrm{ch}\,(0) = 1$.

Fonctions de référence 2

2. La fonction ch est paire et minorée par 1 atteint en 0.
3. La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \text{ch}'(x) = \text{sh}(x).$$

4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \text{ch}(x) = +\infty.$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{ch}(x) - 1}{x} = 0.$

On considère $f : x \longmapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$ est définie si, et seulement si $e^x \neq 1 \iff x \neq 0$.

La fonction ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on résout rapidement

$$\frac{1 + e^x}{1 - e^x} > 0 \iff (-1 <) \, e^x < 1 \iff x < 0.$$

Prenant l'intersection des deux ensembles précédents, on trouve donc $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;0[$.

2. Déterminer et justifier rigoureusement $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Pour tout réel strictement négatif x, $e^x < 1$ donc $1 - e^x > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$, on en déduit $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 - e^x = 0^+$.

Comme $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{X} = +\infty$, d'après les théorèmes sur les limites de composées,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 - e^x} = +\infty.$$

Donc, d'après les théorèmes sur les limites de produits,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{1 - e^x} \times (1 + e^x)\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{1 - e^x} = +\infty.$$

Enfin, $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty$ et les théorèmes sur les composées de limites, entraînent

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

3. Montrer rigoureusement que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de sa dérivée.

Sur $]-\infty\,;0[$, $x \longmapsto \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$, fonction homographique de dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et à valeurs strictement positives d'après la première question donc f y est également dérivable et on a :

$$\forall x \in]-\infty\,;0[\,, \ f'(x) = \frac{2\,e^x}{1 - e^{2x}}.$$

4. Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on ne demande pas de préciser.

D'après la question précédente, la dérivée de f est du signe de $1 - e^{2x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

On pouvait aussi remarquer que f est la composée de $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$, strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec les fonctions strictement croissantes ln et exp. On retrouvait le même résultat.

La fonction f est donc strictement croissante et continue (car dérivable) de $\mathbb{R}_-^*$ sur son image ($\mathbb{R}_+^*$). Elle y établit donc une bijection.

5. Donner l'expression de f^{-1} sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Il suffit de « retourner » l'expression :

$$y = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\right) \iff \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^y \underset{1-\mathrm{e}^x \neq 0}{\iff} (1+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - 1 \underset{1+\mathrm{e}^y \neq 0}{\iff} \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y + 1} > 0 \iff x = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y + 1}\right).$$

Donc, $f^{-1} : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right)$.

Remarque : On pourra vérifier que f^{-1} est définie sur $]0\,;+\infty[$ en déterminant $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Fonctions de référence 2

Fonctions de référence

Compléter :

I/ Fonction puissance réelle

Définition 6 : Pour tout réel α et tout réel x strictement positif , on pose :

$$x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}.$$

Théorème 21 :
Soit α un réel fixé.

La fonction $f : x \longmapsto x^{\alpha}$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Proposition 22 :
Soit α un réel fixé.

$\alpha > 0$ **:** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$.

$\alpha < 0$ **:** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = 0$.

Cas $\alpha > 0$ ($\alpha \in]0\,;1[$) **:**

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$+$	
x^α	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Cas $\alpha < 0$ **:**

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$-$	
x^α	‖ $+\infty$ ↘	1 ↘	0

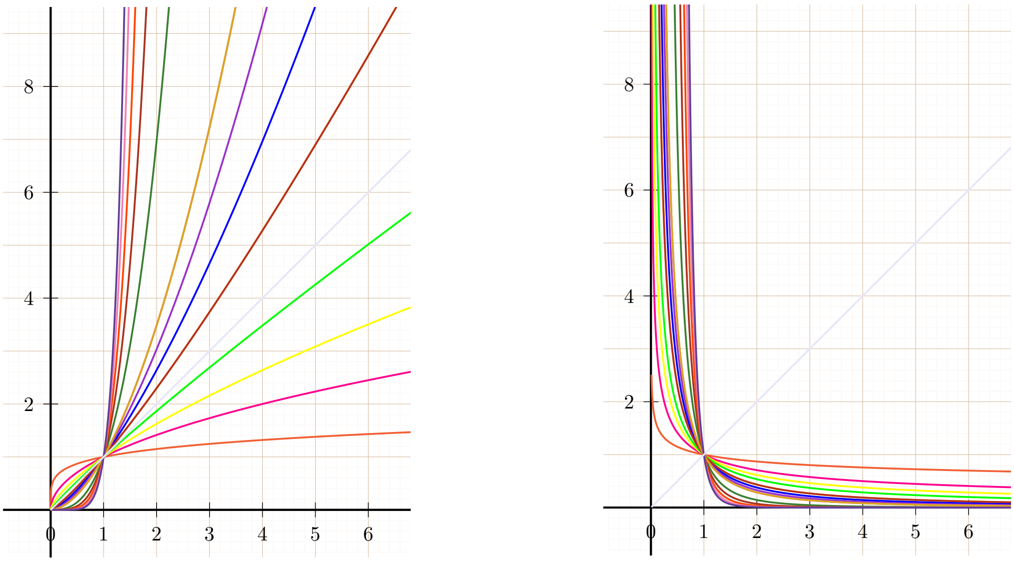

Figure IV.2 – Les fonction puissances $x \longmapsto x^\alpha$.

Proposition 23 (Croissances comparées) :
Pour tous α, β strictement positifs .

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta\, e^{\alpha x} = 0$.

II/ Les fonctions hyperboliques

Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :

— On appelle fonction *sinus hyperbolique* la partie impaire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

De plus, on a l'identité, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}^{\,2}(x) - \mathrm{sh}^{\,2}(x) = 1.$$

Proposition 28 (Sinus hyperbolique) :

1. $\mathrm{sh}\,(0) = 0$.
2. La fonction sh est impaire.

3. La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\,(x).$$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}\,(x) = -\infty$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}\,(x) = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{x} = 1$.

$$\text{On considère } f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{\ln(1 - \mathrm{e}^x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

   La fonction ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on résout rapidement $1 - \mathrm{e}^x > 0 \iff x < 0$.

   De plus, $\mathrm{e}^x \neq 0 \iff 1 - \mathrm{e}^x \neq 1 \iff \ln(1 - \mathrm{e}^x) \neq 0$.

   Donc, $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;0[$.

2. Déterminer et justifier rigoureusement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   Pour tout $x < 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $1 - \mathrm{e}^x < 1$. On en déduit que

   $$\lim_{x \to -\infty} 1 - \mathrm{e}^x = 1^-.$$

   Comme $\lim\limits_{u \to 1^-} \ln(u) = 0^-$, d'après les théorèmes sur les composées de limites,

   $$\lim_{x \to -\infty} \ln(1 - e^x) = 0^-.$$

   Enfin, comme $\lim\limits_{\mathrm{X} \to 0^-} \dfrac{1}{\mathrm{X}} = -\infty$, d'après les mêmes théorèmes, on a donc

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

3. Montrer rigoureusement que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de sa dérivée.

   Sur $]-\infty\,;0[$, $x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^x$ est dérivable et à valeurs strictement positives donc $x \longmapsto \ln(1 - \mathrm{e}^x)$ y est également dérivable. Ne s'annulant pas, son inverse f est également dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

   $$\forall\, x \in]-\infty\,;0[\,,\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1 - \mathrm{e}^x)\,(\ln(1 - \mathrm{e}^x))^2}.$$

4. Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on ne demande pas de préciser.

   Par composition, il est tout à fait évident que f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$. Il est donc tout à fait inutile d'avoir recours au signe de la dérivée, de la question précédente même si celle-ci, du signe de $1 - \mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathcal{D}_f$ confirme notre réponse.

   La fonction f est donc strictement croissante et continue (car dérivable) de $\mathbb{R}_-^*$ sur son image $(\mathbb{R}_-^*)$. Elle y établit donc une bijection.

5. Donner l'expression de f^{-1} sur $\mathbb{R}_-^*$.

Fonctions de référence

Soient $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Il suffit de « retourner » l'expression :

$$y = \frac{1}{\ln(1-\mathrm{e}^x)} \neq 0 \iff 1 - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{1}{y}} \iff 0 < \mathrm{e}^x = 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{y}} \iff x = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\right).$$

Donc, $f^{-1} : x \longmapsto \ln\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

Remarque : On pourra vérifier que f^{-1} est définie sur $]-\infty\,;0[$ en déterminant $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^-$.